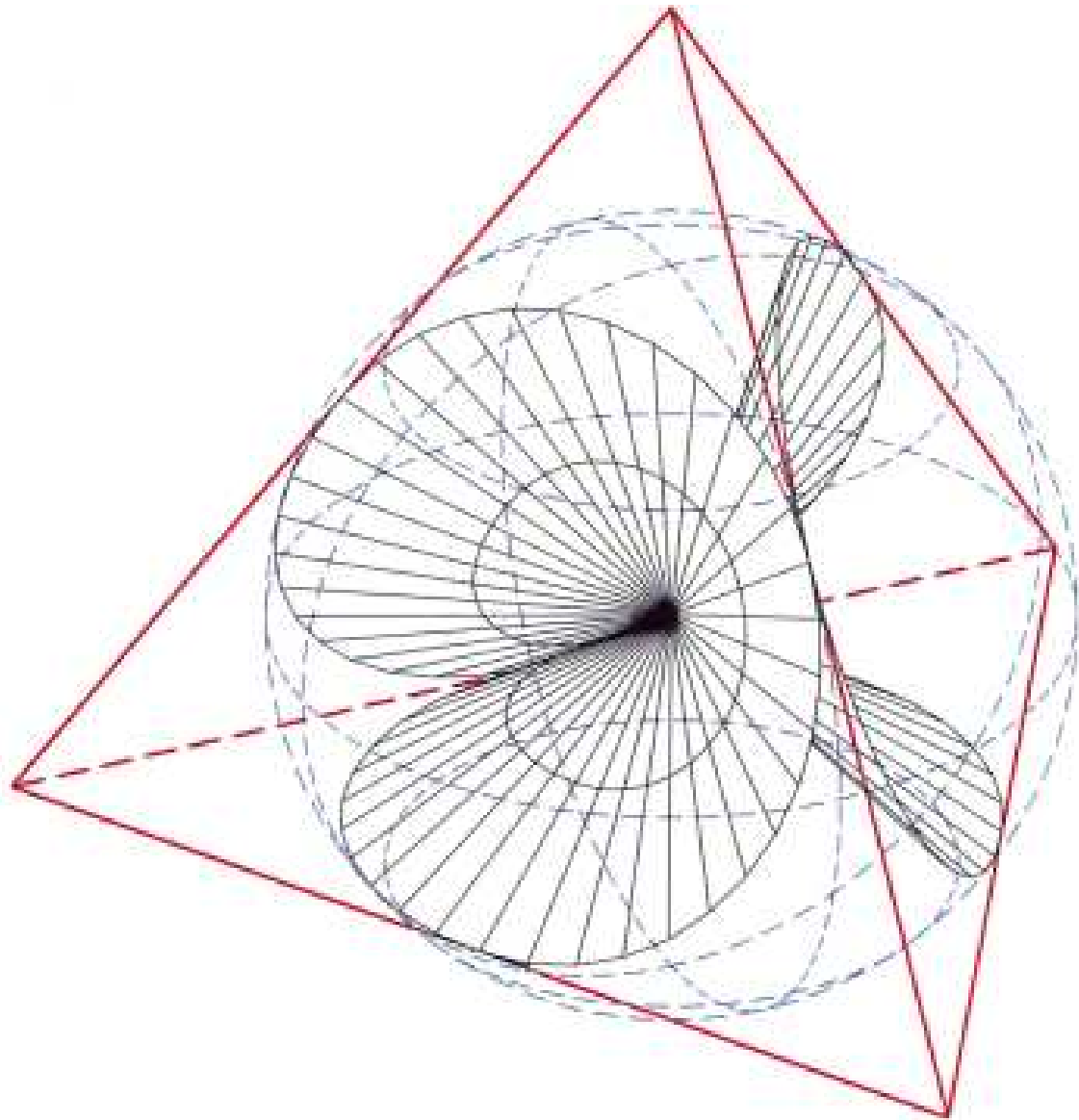


CARLO ROSELLI
GEOMETRIA, DINAMICA E ARCHITETTURA DEL VUOTO



GEOMETRIA, DINAMICA E ARCHITETTURA DEL VUOTO

CARLO ROSELLI

Indice

5	Ringraziamenti
7	Introduzione
17	Forme Semplici Caratteristiche della curva e della superficie $\text{Loop}_{2/3}$ - Simmetrie del tetraedro - Simmetrie della curva e della superficie $\text{Loop}_{2/3}$ - Proprietà degli assi di simmetria della curva $\text{Loop}_{2/3}$ - Sottocurve della curva $\text{Loop}_{2/3}$ - Simmetrie della curva $\text{Loop}_{1/3}$ - Emiloops curve libere - Emiloop curva tangente - Simmetrie degli Emiloops - Individuazione di un nuovo tipo di simmetria - Equazione della curva $\text{Loop}_{2/3}$ - Equazione della superficie $\text{Loop}_{2/3}$ - Volume $\text{Loop}_{2/3}$ - Il sistema monoduale
53	Forme Composte Regole relative alla lettura - regole relative al periodo di <i>spin</i> - regole di accoppiamento armonico - Strutture armoniche SA.2, SA.5, SA.9, SA.17
65	Cenni sulle Forme Complesse
67	<i>Appendice A1</i> Tabella delle Curve, Superfici e Volumi delle Forme Semplici
73	<i>Appendice A2</i> Istruzioni per la costruzione e manipolazione di un modello di "superficie" $\text{Loop}_{2/3}$

© Copyright 1996, 2000 by Carlo Roselli

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento, totale o parziale, con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), sono riservati per tutti i Paesi.

RINGRAZIAMENTI

INTRODUZIONE

Questo saggio propone e descrive, con procedimenti matematici e geometrici, una particolare figura tridimensionale che ha affinità sia con la sfera che con il tetraedro e le cui caratteristiche di forma e simmetria consentono di delineare un concetto di maggiore semplicità rispetto alle suddette due figure.

Nello studio di questa nuova forma geometrica sembrerà farsi strada l'interessante idea di un suo possibile collegamento con i fenomeni più enigmatici della natura su scala microscopica. Si tratterà probabilmente di un'idea illusoria, ma potrebbe valere la pena di sostenerla e tentare di avvalorarla attraverso ulteriori approfondimenti. Dico questo perché trovo difficile pensare che la figura qui messa in gioco abbia un valore esclusivamente matematico ed estetico. Non a caso essa è scaturita da personali riflessioni intorno ad alcune questioni fondamentali della scienza, soprattutto quelle riguardanti il comportamento dei sistemi atomici. Di tali riflessioni, raccolte in altri scritti, sarà dato qui di seguito qualche accenno affinché il lettore abbia modo di conoscere il contesto in cui è nato il presente lavoro.

La nascita della scienza moderna è riconducibile all'opera di Galileo (1564-1642) che introdusse in fisica il *metodo riduzionista*, con il quale le cose possono essere interpretate in termini di componenti più semplici ed espresse in linguaggio matematico. Egli si rese conto che soltanto seguendo questo criterio fondato soprattutto sul concorso dell'osservazione dei fenomeni, della matematica e dell'esperimento si sarebbe potuto procedere, passo dopo passo, verso una descrizione completa della realtà fisica.

Le sue idee, le sue osservazioni sul moto dei corpi e sulla caduta dei gravi, e gli esperimenti accompagnati da meticolose descrizioni matematiche costituirono un contributo fondamentale al futuro sviluppo della scienza moderna, a partire dalla formulazione dell'insieme di leggi fisiche descritte da Isaac Newton (1643-1727) nella sua opera *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687).

Da Galileo in poi il cardine della ricerca scientifica sarà la stretta interazione tra teoria e esperimento.

La teoria è un modello matematico in grado di formulare previsioni per una data varietà di fenomeni e nasce dalla capacità del pensiero di riconoscere, all'interno di una grande quantità di dati osservativi, una struttura che li riconduca ad una rappresentazione abbreviata. Più breve è questa rappresentazione, più profonda e ampia sarà la teoria. Inoltre, per stabilire la validità di una teoria fisica, la scienza odierna adotta il *criterio di falsificabilità* proposto da Karl R. Popper (1902-1994). Esso stabilisce che una teoria, per avere una veste scientifica, deve poter fare delle previsioni che a loro volta possano essere controllate attraverso gli esperimenti, e saranno questi ultimi a decretare se confutarla oppure no. Ma per quante volte risulti non confutata, la teoria non potrà mai dichiararsi invulnerabile. Essa sarà pertanto considerata valida fino a prova contraria. In sintesi, una teoria è accettata come scientifica se è falsificabile.

Nella scelta fra due teorie scientifiche fondate su ipotesi diverse per spiegare gli stessi fenomeni (teorie fra loro antagoniste), si deciderà di adottare quella che comporta una maggiore *profondità* e *ampiezza*, ovvero quella che riesce a spiegare non solo in modo più preciso la stessa classe di fenomeni previsti anche dall'altra teoria, ma fenomeni aggiuntivi che non si conciliano con le predizioni di quella. La teoria scelta soppianderà l'altra incorporandola come un caso limite di accuratezza predittiva. Ad esempio, la teoria della gravitazione di Newton è stata incorporata dalla *teoria della relatività generale* formulata nel 1915 da Albert Einstein (1879-1955).

La teoria di Newton stabilisce una legge sul moto dei corpi fondata sull'idea di una forza attrattiva, sulla cui origine egli non era però in grado di fornire alcuna spiegazione. Questa teoria, pur avendo la pecca di non render conto delle peculiarità dell'orbita di Mercurio, è stata considerata una verità indiscussa per oltre due secoli, fino a quando Einstein individuò la causa del moto dei corpi nelle proprietà geometriche dello *spazio-tempo* determinate dalla presenza di masse, eliminando così l'idea di forza attrattiva.

Abbandonata la vecchia concezione di uno spazio omogeneo e assoluto a tre dimensioni, Einstein ricorse alla nozione di *campo*, già introdotta in fisica da Michael Faraday (1791-1867) e James C. Maxwell (1831-1879), ma illuminandola con una nuova idea: il campo gravitazionale è esso stesso spazio, inteso quale prolungamento dei corpi e in un legame indissolubile con il tempo, il cosiddetto “continuo spazio-temporale curvo a quattro dimensioni”. Ciò che determina la curvatura dello spazio-tempo è la distribuzione della materia e dell’energia: ogni corpo materiale, con la sua presenza e con il suo moto, varia la configurazione del campo da esso generato e la variazione, a sua volta, propagandosi dal corpo verso l’esterno alla velocità della luce, influisce sul moto degli altri corpi.

Gli effetti della curvatura dello spazio sono misurabili in prossimità di grandi masse, come il sole, e ancor più sensibilmente nelle vicinanze di campi gravitazionali straordinariamente forti, come quelli generati da stelle di neutroni o da buchi neri, questi ultimi vere e proprie trappole spazio-temporali dalle quali nulla sembra poter sfuggire.

L’obiettivo ultimo della scienza contemporanea è una descrizione unitaria e razionale delle leggi che governano la natura. Ma il cammino verso il suo raggiungimento si è rivelato pieno di ostacoli, emersi nel corso delle grandi svolte scientifiche nella prima metà del ventesimo secolo e venuti a mettere in discussione il concetto stesso di scienza come teoria. L’ostacolo maggiore si presenta quando si tenta di conciliare i principi sui quali si fondano le due teorie fisiche oggi dominanti: la già citata *relatività generale*, che descrive gli aspetti macroscopici del nostro universo, e la *meccanica quantistica*, che descrive la luce e la struttura della materia.

La teoria quantistica nasce nel dicembre del 1900 per merito di Max Planck (1858-1947) che trovò il modo di spiegare formalmente la legge sulla distribuzione spettrale del corpo nero.

Un corpo nero ideale è una cavità perfettamente isolata le cui pareti sono in grado di assorbire tutta l’energia incidente. Nella realtà, una cavità come ad esempio un forno che abbia un piccolo foro attraverso il quale possa essere introdotto un dispositivo di misurazione rappresenta una buona approssimazione di corpo nero.

Tra gli atomi in agitazione termica che compongono le pareti del corpo nero e le onde elettromagnetiche al suo interno (che trasportano energia) viene ad instaurarsi un generale equilibrio nella distribuzione dell’energia. Se si pompa energia all’interno del corpo nero, la temperatura cresce e la radiazione in esso contenuta passa da una luce rossa a una gialla e poi azzurra e bianca, secondo lo spettro dei colori, ovvero avviene un passaggio per radiazione elettromagnetica di frequenza crescente.

Verso la fine del ‘900, due fisici inglesi, John W. Rayleigh (1842-1919) e James Jeans (1877-1946), basandosi sulle leggi della teoria di Maxwell, costruirono una formula per prevedere la radiazione prodotta in un corpo nero. La formula funzionava bene a grande lunghezza d’onda, e cioè a bassa energia, ma pompando energia nella cavità, questa avrebbe dovuto irradiare un’energia illimitata, ovvero onde di lunghezza sempre più piccola. Infatti, i fisici di allora credevano che ogni onda elettromagnetica potesse trasportare una quantità arbitrariamente piccola di energia, e poiché per le onde elettromagnetiche sono disponibili infiniti modi di oscillazione, quei fisici non avevano alcuna idea di come calcolare la distribuzione dell’energia. In altre parole, se ogni onda trasportasse una benché minima frazione dell’energia totale, la presenza di infinite onde (derivanti da infiniti modi possibili di oscillazione) implicherebbe una quantità infinita di energia. Viceversa, se l’energia totale disponibile in quantità finita dovesse essere ripartita fra un numero infinito di onde, ciascuna di queste ne trasporterebbe una quantità infinitesima.

Essendo tali conclusioni teoriche prive di senso, poiché in contrasto con i risultati degli esperimenti in cui si osservavano sempre valori finiti, era evidente che la formula di Rayleigh e Jeans dovesse contenere un qualche errore.

Nel dicembre del 1900 Planck riuscì a correggere quella formula e definì un “atto disperato” quel suo intervento, perché con esso egli si vide costretto a modificare drasticamente le leggi fisiche fino a quel tempo note. Infatti, Planck propose l’idea che l’energia di una radiazione di data frequenza,

come quella di un atomo, potesse variare soltanto per *quantità discrete*, corrispondenti all'emissione e/o all'assorbimento di uno o più quanti di luce.

Egli postulò così l'esistenza di un elemento discreto di energia che designa la differenza fra due livelli energetici secondo la formula $E=h\nu$, dove E è l'energia, ν è la frequenza della radiazione e h è una costante che specifica il quanto minimo d'azione.

Poiché la frequenza della luce è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda, λ , alle lunghezze d'onda più corte corrisponderà una frequenza maggiore e, dunque, una spesa più grande di energia.

La luce viene emessa in "pacchetti" di energia luminosa definiti da Einstein "quanti di luce" e in seguito chiamati "fotoni" da Gilbert Newton Lewis (1875-1946), ognuno caratterizzato da una data frequenza moltiplicata per la costante h .

Con questa impostazione teorica, il fenomeno della radiazione avverrebbe per salti, e dunque secondo una logica basata sulla discontinuità. Fu lo stesso Planck a presagire che questa intuizione

pareva destinata a rivoluzionare il nostro pensiero fisico basato, fin da quando Leibniz e Newton avevano fondato il calcolo infinitesimale, sull'ipotesi della continuità di tutti i rapporti causali.¹

Planck non aveva però alcuna idea per stabilire se i fotoni fossero oggetti reali o soltanto puri costrutti matematici. Pertanto, non restava che aspettare e sperare in una spiegazione attraverso la scoperta di un qualche nuovo principio fisico.

Il quanto elementare d'azione h , detto propriamente "costante di Planck", rappresenta la più piccola variazione osservabile e la sua grandezza può essere espressa nella forma $h = ET$, ovverosia energia per tempo (il tempo T è il periodo dell'onda ed è l'inverso della frequenza ν). Ciò significa che il quanto d'azione h può avere una durata temporale piccola quanto si voglia ma non nulla, poiché ad un intervallo di tempo nullo dovrebbe essere associata un'energia infinita, e ciò spoglierebbe di senso fisico le due grandezze coniugate.

Grazie a Planck si è potuta così identificare una nozione concernente l'*elementarità* fisica, che però è ben lontana dalla nozione atomistica di Democrito e da quella inseguita dagli atomisti contemporanei nel contesto del cosiddetto "Modello Standard" della fisica delle particelle (v. ultime tre pagine di questa introduzione).

L'assunto di Planck porta alla dissoluzione dei tradizionali concetti di elementarità e di materia. Infatti, il quanto elementare d'azione sarà in seguito visto come l'espressione di un contesto puramente *spazio-temporale* e, dal punto di vista dei realisti, sarà considerato oggettivamente esistente, dato che nella visione odierna della fisica quantistica l'intero universo sembra essere costituito di sole azioni e interazioni.

Un'ulteriore svolta significativa in fisica quantistica è avvenuta nel 1913 con l'introduzione del concetto di *stato quantico* da parte di Niels Bohr (1885-1962). Questo nuovo concetto, la cui nascita deve molto sia all'idea di "quanto elementare d'azione" di Planck sia ai successivi contributi di Einstein sulla natura corpuscolare della luce, si rivelò molto fruttuoso. Come prima cosa permise a Bohr di trovare una soluzione al modello di atomo concepito a quel tempo dal fisico Ernest Rutherford (1871-1937) sulla base dei concetti della meccanica newtoniana, inadeguati a spiegare la stabilità degli elettroni intorno al nucleo atomico (infatti, attenendosi alla concezione classica si prevedeva che gli elettroni di un atomo, irraggiando energia, sarebbero infine precipitati nel nucleo). Bohr propose una descrizione coerente del moto degli elettroni in termini di orbite quantizzate a partire da un'orbita, vicina il più possibile al nucleo dell'atomo, chiamata "stato fondamentale ell'elettrone". L'elettrone, se sufficientemente eccitato, effettua un salto andando ad occupare un'orbita superiore, senza poter occupare orbite intermedie.

In seguito si comprese anche che il concetto di stato quantico doveva essere associato alla duplice natura degli elettroni, che si comportano a volte come onde e altre volte come corpuscoli

¹ Max Planck, *La Conoscenza del mondo fisico*- ed Boringhieri 1993, cit. p. 106.

materiali, a seconda di come vengano condotti gli esperimenti da parte di un osservatore che vuole studiarne le proprietà.

Infine, tale concetto portò la fisica quantistica ad una compiuta formulazione teorica, la *meccanica quantistica*, avvenuta nel 1926 con il lavoro di Bohr basato sul *principio di complementarità*, che rappresenta essenzialmente l'aspetto interpretativo degli asserti probabilistici della teoria, e il lavoro di Werner K. Heisenberg (1901-1976) basato sul *principio di indeterminazione*.

Quest'ultimo principio stabilisce l'impossibilità di calcolare con arbitraria precisione coppie di grandezze relative ad una particella, come ad esempio la sua posizione, x , e la sua quantità di moto, p , e stabilisce un limite assoluto al prodotto delle due precisioni, Δx e Δp , fissato nella nota relazione di Heisenberg: $\Delta x \Delta p \geq \hbar$, dove $\hbar$ (leggi "acca tagliata") rappresenta la costante di Planck h divisa per 2π .

Tale limite deriva dal fatto che le quantità misurabili sono soggette a fluttuazioni imprevedibili e inevitabili; infatti, se ad esempio si vuole misurare la posizione di un elettrone in un atomo con una grande precisione, occorre colpirlo con fotoni di piccola lunghezza d'onda, dotati cioè di una quantità di moto tale che il contraccolpo derivante altererà notevolmente e *casualmente* la quantità di moto dell'elettrone e, in modo complementare, se si misura la quantità di moto di un elettrone, se ne altererà la posizione, cosicché non è dato conoscere gli stati futuri di un particolare sistema atomico, ma solo predirne le probabilità dei diversi stati possibili.

Le due teorie fisiche dominanti concorrono con risvolti problematici di vario genere nel ricercare una descrizione unitaria delle leggi fisiche fondamentali: la relatività generale si scontra con la nozione paradossale di *singularità* prevista all'interno di un buco nero che si formerebbe in particolari circostanze in cui è coinvolta una quantità di massa superiore a un valore critico, oltre il quale la teoria predice valori infiniti per la densità della materia e per la curvatura dello spazio: la massa si contrarrebbe irresistibilmente riducendosi ad un punto adimensionale; verrebbe così meno quel collegamento indissolubile dello spazio e del tempo che è a fondamento della teoria.

La meccanica quantistica, dal canto suo, è caratterizzata da stranezze che spiazzano la logica comune e che il linguaggio classico non sembra in grado di ridurre ad una descrizione intuitivamente comprensibile. Infatti, i principi sui quali è fondata la teoria dei quanti hanno messo in crisi i nostri concetti rassicuranti di *materia*, di *luogo*, di *traiettoria* e di *causalità*.

Qualsiasi ipotesi di unificazione completa delle leggi fisiche note alla scienza richiederà di apportare modifiche all'una o all'altra teoria, se non ad entrambe, in quanto sembra insanabile il conflitto tra i principi sui quali esse sono rispettivamente fondate. Il sospetto che almeno una di queste due teorie possa non essere fundamentalmente corretta, pur risultando così ben funzionante, può rappresentare un buon motivo per indagare più in profondità. Si dovrebbero sviluppare allora teorie alternative per ricercare connessioni nascoste o nuovi principi in grado di spiegare gli stessi fenomeni.

Come guida della ricerca, si potrebbe assumere la validità della teoria quantistica e riuscire ad introdurre idee innovative sulla struttura dello spazio-tempo esplorando specifici ambiti della matematica, quali, ad esempio, la topologia e la moderna teoria dei nodi. Oppure si potrebbe partire dalla teoria della relatività generale e chiedersi in che modo questa possa modificare la teoria quantistica per assorbirla nel suo contesto.

Non si può poi escludere che entrambe le teorie debbano in qualche misura essere modificate. Ma, abbandonando la credibilità delle due teorie fisiche più profonde, quale principio potrebbe guidare tale ricerca? E pur supponendo che in futuro si trovi il modo di unificare le due teorie, come ci si potrebbe convincere di essere entrati in possesso di una teoria fisica completa e coerente insieme?

Per rispondere a queste domande occorrerà tener conto di due radicali limitazioni che fanno apparire impossibile alla scienza l'aspettativa di una conoscenza unitaria del mondo fisico: il già citato principio di indeterminazione alla base della teoria quantistica, e il *Teorema di incompletezza di Gödel* (Kurt Gödel, 1906-1978) all'interno del sistema logico-matematico.

Questo teorema, pubblicato nel 1931, stabilisce che *è impossibile dimostrare, con un numero finito di passi, coerenza e completezza insieme di un sistema assiomatico formalizzato sufficientemente esteso da includere almeno l'aritmetica dei numeri naturali*. In altre parole, esso dimostra che nel calcolo teorico non esiste un insieme di assiomi per dimostrare tutti gli enunciati possibili. Le restrizioni imposte dal teorema vengono dunque a riflettersi su una qualunque teoria fisica che miri ad un riconoscimento di completezza e di scientificità, in quanto, per poter essere controllata sperimentalmente, deve quantomeno includere una trattazione di natura aritmetica.

Sia il principio di indeterminazione quantistica che il teorema di incompletezza di Gödel rappresentano due fondamentali conquiste del pensiero che, attraverso opportune riflessioni, possono infonderci un legittimo sospetto: i concetti e i principi logici di cui ci siamo finora serviti per ampliare e approfondire le nostre conoscenze in fisica e in matematica, per quanto apparentemente ineccepibili, potrebbero essere fondati su convinzioni erranee, e quindi inadeguati a risolvere le questioni dei fondamenti nei loro rispettivi ambiti.

La meccanica quantistica, sebbene comporti uno straordinario accordo con i resoconti sperimentali, conduce la conoscenza che abbiamo del mondo in una zona dominata da nozioni estranee alla nostra razionalità: *indeterminismo intrinseco, sovrapposizione di stati* (un elettrone, ad esempio, può trovarsi allo stesso tempo in luoghi diversi prima che avvenga una misurazione) e i conseguenti *asserti probabilistici*, cosicché non è dato sapere se questi ultimi derivino da una nostra provvisoria ignoranza o da un limite naturale all'intelligibilità.

Fra le interpretazioni plausibili della teoria si è imposta quella probabilistica di Bohr, fondata sulle suddette nozioni e sull'idea di una incompiutezza del nostro apparato concettuale.

Il lavoro di Bohr è alla base del paradigma filosofico e scientifico delle Scuole di Copenhagen e Göttingen e rappresenta una forma estrema dello strumentalismo (o operazionismo) all'interno del neoempirismo logico, e cioè quel programma di rinnovamento della concezione filosofica della scienza nato agli inizi del novecento allo scopo di riesaminare la natura e il significato dei concetti scientifici dopo l'abbandono della vecchia visione meccanicistica del mondo in favore della nuova visione relativistica e quantistica.

Questo lavoro di Bohr, noto anche come "interpretazione ortodossa della meccanica quantistica", asserisce che la teoria è *completa* e che i suoi principi non ci legittimano ad attribuire ai sistemi atomici grandezze ben definite o dotate di significato fino a quando non vengano misurate. Ciò comporta la negazione del *principio di oggettività* della natura, ovverosia della reale esistenza dei fenomeni indipendentemente dagli atti di misurazione/osservazione. Bohr, infatti, essendo convinto di non poter rendere più interessante la sua teoria con l'aggiunta di postulati non necessari, ha ritenuto che una concezione oggettiva della realtà non è essenziale alla fisica.

A tale interpretazione aderirono fisici come Sommerfeld, Born, Pauli, Jordan e Dirac, mentre ad essa si opposero tenacemente i sostenitori del *realismo* e del *causalismo*, quali Planck, Einstein, Schrödinger e de Broglie, riconosciuti padri fondatori della teoria.

Le accese controversie fra i due diversi schieramenti, che per semplicità chiameremo rispettivamente "antirealisti" e "realisti", ebbero l'effetto di alimentare la ricerca. I realisti non sono però mai riusciti a trovare argomentazioni idonee a demolire la tesi probabilistica della nuova teoria (e con essa l'assunto della sua completezza), nonostante gli incalzanti tentativi volti a contrastarla. Tra questi, il più significativo è stato un esperimento ideale elaborato nel 1935 da Einstein insieme ai fisici Boris Podolsky (1896-1966) e Nathan Rosen (1909-1995) e noto come esperimento *EPR*, dalle loro iniziali. Questo esperimento intendeva dimostrare che i sistemi quantistici possiedono proprietà ben definite, indipendentemente dalle misurazioni che si eseguono su di essi.

Le memorabili dispute, che videro a confronto le contrastanti posizioni filosofiche ed epistemologiche di Einstein e di Bohr, si protrassero per anni, fino a quando il realismo inteso alla maniera di Einstein fu dichiarato sconfitto e, sorprendentemente, un nuovo fenomeno chiamato "non-località" irruppe ad infittire i misteri dell'universo quantistico: due o più particelle che abbiano interagito fra loro sembrano costituire un tutt'uno inseparabile anche se si allontanano a

grande distanza. Infatti, se sottoposte a misurazione con appropriati dispositivi, quelle due particelle danno l'impressione di essere telepatiche o di scambiarsi informazioni a velocità superluminali.

Nel lungo periodo in cui si susseguirono le dispute fra antirealisti e realisti, la ricerca scientifica procedeva a ritmi sempre più veloci, e grazie anche agli sviluppi della tecnologia fu possibile avviare un programma di studio sulla struttura della materia. La prima grande svolta in questo ambito avvenne nel 1928 con l'ipotesi dell'esistenza dell'antimateria prevista da Paul Dirac (1902-1984), poi confermata sperimentalmente nel 1932 da Carl D. Anderson (1905-1991).

Dopo la scoperta del positrone (elettrone con carica positiva) è iniziata la corsa alla costruzione di acceleratori di particelle sempre più potenti, perché il solo espediente per studiarle sembra quello di frantumarle attraverso urti violenti, in modo che dalla registrazione degli effetti possano essere estrapolate informazioni sulla loro composizione e sulle forze che agiscono al loro interno. I prodotti emergenti dalle collisioni non sono però costituiti da "oggetti" più piccoli delle particelle originarie, e l'eccesso di grandezza è conseguito a spese dell'energia cinetica impiegata nel processo d'urto.

Per approfondire la conoscenza sulla struttura di questi prodotti oggi ci si serve della fisica delle alte energie e delle moderne versioni della fisica quantistica: le *Teorie quantistiche dei campi*. Queste teorie incorporano i principi della *relatività ristretta, o speciale* formulata da Einstein nel 1905 (quest'ultima prevede l'unificazione dei concetti di spazio e di tempo, nonché la trasformazione dell'energia in materia e viceversa in base alla nota equazione $E = mc^2$, dove m è la massa e c la velocità della luce) e introducono il nuovo concetto duale di *campo-particella*: il campo è un'entità inosservabile che si manifesta sotto forma di particella, mentre ogni particella è un quanto associato a un campo.

Si è poi andata affermando l'idea innovativa che qualsiasi cosa stia oscillando con una data frequenza possa solo manifestarsi in unità discrete di massa $m = hv/c^2$ (questa formula segue dalle due equivalenze $E = hv$, $E = mc^2$, e afferma che la massa equivale al rapporto tra il prodotto della costante di Planck per la frequenza e il quadrato della velocità della luce).

Le osservazioni sperimentali volte ad indagare sempre più in profondità la struttura e il comportamento dell'universo subatomico hanno infine condotto i fisici a pensare che esso sia costituito soltanto di *particelle* e di *oscillazioni di campo*, e che le une e le altre debbano essere aspetti diversi di un'unica cosa.

Molti scienziati ritengono di essere molto vicini alla possibilità di identificare i costituenti ultimi della realtà fisica. Essi non intendono però limitarsi a redigerne l'elenco, ma vorrebbero capire perché esistano proprio quelle entità fondamentali e quelle precise forze che agiscono su di esse, nonché quali legami matematici ci siano tra le prime e le seconde. Inoltre, essi sperano di costruire, a breve, una teoria che unifichi tutti gli aspetti della natura in un supermodello, e sono anche fiduciosi che questo possa essere caratterizzato da straordinaria semplicità e bellezza.

Il Modello Standard delle teorie quantistiche dei campi si è sviluppato a partire dalla proposta avanzata nel 1964 dal fisico americano Murray Gell-Mann (1929-2019) circa l'esistenza di particelle subatomiche che egli ha chiamato "quark" e che poi, nel 1969, sono stati scoperti sperimentalmente. Esistono sei diverse varietà di quark, dette "sapori": *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* e *top*; questi entrano a far parte di tutte e quattro le interazioni fondamentali, laddove i primi due sono i più stabili, mentre i restanti quattro decadono rapidamente.

Il Modello Standard è tuttora in via di sviluppo e studia le tre forze che agiscono a brevissima distanza all'interno dell'atomo: 1) - la forza *elettromagnetica*, che tiene insieme gli elettroni e i nucleoni nell'atomo, i quali, a loro volta, possono connettersi tra loro per formare molecole e catene molecolari; 2) - la forza *nucleare forte*, che assicura una straordinaria stabilità alla struttura nel nucleo (dato che tutti i protoni di un nucleo atomico possiedono una carica positiva, la forza deve essere straordinariamente forte per tenerli insieme a dispetto delle enormi forze elettriche repulsive che tendono a farli respingere tra loro; 3) - la forza *nucleare debole* responsabile del decadimento del neutrone (più precisamente, della sua trasformazione in un protone con il rilascio di un elettrone e di un anti-neutrino) e anche dell'esplosione di stelle di grande massa, quali le supernovae e le iper-

novae. La forza elettromagnetica e quella debole sono state unificate nella forza *elettro-debole* nel 1979 da Sheldon Glashow (1932-1939), Abdus Salam (1926-1996), Steven Weinberg (1933-2021) e le particelle W e Z da loro predette sono state poi scoperte nel 1983 da Carlo Rubbia (1934) e Simon van der Meer (1925-2011) al Super Proton Synchrotron del CERN.

Per quanto si sa, nel nostro mondo sono all'opera quattro forze fondamentali: 1) *elettromagnetica*, *nucleare debole*, *nucleare forte* e *gravitazionale*. Ognuna di queste forze comporta lo scambio di una o più particelle dette "virtuali". Il *fotone* è la particella di scambio nell'elettromagnetismo, W^+ , W^- and Z^0 sono le particelle nelle interazioni deboli, il *gluone* nelle interazioni forti e il *gravitone* in quelle gravitazionali. Queste interazioni, spiegate come scambio di particelle virtuali, ad eccezione delle gravitazionali, sono descrizioni consolidate delle leggi della natura.

Il Modello Standard comprende l'Elettrodinamica Quantistica, la Cromodinamica Quantistica e la Teoria Elettrodebole, e descrive le forze che agiscono tra le particelle subatomiche, come trasmesse a loro volta da altre particelle chiamate "messaggere".

Questo genere di spiegazione ha un rilevante significato: una teoria in grado di descrivere tutte le particelle fondamentali sarà tale da descrivere anche tutte le forze. Supponendo che *particelle e forze*, o questa ipotetica *unica cosa*, non siano simili a pozzi senza fondo secondo una gerarchia di infiniti livelli di componenti sempre più piccoli, sembra ragionevole pensare che esista un livello ultimo di realtà fisica. Ma a questo punto si affaccia il problema cruciale di come concepire un frammento di realtà con le caratteristiche logicamente comprensibili dell'*elementarità* (nel senso di essere pensabile e descrivibile come ciò che è indivisibile).

Gli studiosi della composizione della materia considerano elementari alcuni suoi componenti. Li considerano tali per un motivo piuttosto semplice: in base agli esperimenti eseguiti alle energie attualmente disponibili, alcune particelle, come ad esempio gli elettroni, risultano prive di struttura, prive cioè di un qualche nucleo duro contro il quale un'altra particella scagliata ad alta velocità possa rimbalzare. In questo senso, l'*elementarità* in fisica è un concetto puramente convenzionale. Non si può pertanto escludere che a energie più elevate le particelle oggi considerate elementari non risultino più tali.

Chiaramente, per sperare di costruire una teoria unitaria e comprensibile del mondo fisico occorrerà sapere quali siano, se esistono, i costituenti ultimi della materia e quali siano le loro genuine proprietà. Ma una tale conoscenza non potrà mai pervenirci da teorie basate esclusivamente sul calcolo delle grandezze fisiche, perché nei controlli sperimentali sussisterà sempre un margine di incertezza almeno corrispondente alla grandezza della costante di Planck. Ed è proprio Planck ad affermare che

[...] la stessa esistenza del quanto d'azione indivisibile fissa un limite numericamente ben prescindibile oltre il quale anche il più fino fra i metodi di misura non può fornirci alcun ragguaglio che ci aiuti a risolvere le questioni che concernono i particolari processi reali.

Nel Modello Standard della fisica quantistica le ipotetiche particelle *elementari* sono considerate *puntiformi*, facendo così riferimento ai concetti della geometria euclidea, che può considerarsi una teoria delle proprietà dello spazio fisico prima ancora che una branca della matematica. Sulla base di tale assunto, l'introduzione del calcolo per la misurazione delle grandezze fisiche, come ad esempio il campo elettrico dell'elettrone, che varia in proporzione inversa al quadrato della distanza, ha come conseguenza una proliferazione di quantità infinite (quando la distanza tende a zero, il campo elettrico tende a infinito, e viceversa), Ciò costituisce un'anomalia che i fisici hanno trovato modo di superare con una strategia (discutibile) chiamata "rinormalizzazione". Questa consiste nel ridefinire la scala metrica portando al punto zero della sorgente da misurare il valore ottenuto sperimentalmente ad una distanza arbitraria opportunamente piccola, ma maggiore di zero.

Questo procedimento è senza dubbio un espediente utile ai fisici per non vanificare i loro calcoli, ma ha dei limiti: esso non risulta più praticabile quando entra in gioco il campo gravitazionale, e

pertanto potrebbe essere interpretato come il segnale di qualcosa di erroneo negli assunti della teoria.

D'altro canto, se si volessero considerare le particelle come piccolissime sfere, che sono oggetti appartenenti a una visione familiare dello spazio, si incorrerebbe in un problema altrettanto serio: una sferetta implica l'idea di estensione e in questa particolare ipotesi richiederebbe la proprietà di essere assolutamente rigida, ma nel quadro della fisica quantistica relativistica tale proprietà comporterebbe che, se la sferetta venisse urtata da un'altra particella in una precisa regione della sua superficie, tutte le altre sue regioni dovrebbero mettersi in moto simultaneamente, violando così il principio della teoria della relatività che vieta la trasmissione di informazione a velocità superiore a quella della luce. Inoltre, dal punto di vista del realismo, né la nozione di particella puntiforme, né quella di sferetta rigida consentono di comprendere *come* e *dove* le particelle attingano le loro proprietà quantomeccaniche, come ad esempio lo *spin* dell'elettrone (il suo momento angolare). Occorrerebbe allora un'idea ben più originale per descrivere il concetto di elementarità in modo intelligibile.

Se un tempo, con il solo aiuto della filosofia, della matematica e di strumenti di osservazione relativamente grossolani, l'immagine di un frammento elementare della realtà microscopica risultava concettualmente inafferrabile perché inseguita con l'idea ingenua di un fondamento impenetrabile ed eterno, oggi, in base agli esperimenti eseguiti nella cornice di nuove teorie quantistiche (basate sull'ontologia dei campi) e con l'aiuto di una tecnologia molto avanzata, si presenta uno scenario di sole configurazioni dinamiche, che risultano altrettanto inafferrabili.

L'idea di *continuo più materiale* della visione classica, basata sull'idea di un rigido determinismo, è venuta a scontrarsi con quella di *discontinuo più immateriale* della visione relativistica dei campi quantistici basata su un indeterminismo fondamentale.

Sarà adesso utile ricordare alcune significative idee hanno percorso la rivoluzione scientifica del Novecento, a partire dal 1854, quando il matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866) tenne a Gottinga un discorso con il quale si aprì una nuova concezione cosmologica in cui spazio e materia sono pensabili in modo interdipendente: la materia determina la geometria dello spazio curvo e la geometria dello spazio decide il moto della materia². A sostegno di questa sua concezione, Riemann aveva dovuto affrontare alcune questioni riguardanti i concetti fondamentali della geometria, che erano rimasti immutati nonostante i recenti sviluppi. In particolar modo, egli s'interessò al fatto che le strutture geometriche erano state sempre concepite in una, due e tre dimensioni, secondo la natura della loro estensione; una dimensione per le linee, due per le superfici e tre per i volumi.

Riemann si era chiesto se una tale restrizione numerica delle dimensioni fosse una proprietà logicamente necessaria della natura. Se lo erano chiesto certamente anche filosofi e matematici fin dal tempo di Euclide, ma senza aver mai potuto fornire una risposta soddisfacente. Riemann era convinto che questa impasse avesse la sua spiegazione nel fatto che nessuno aveva mai pensato di sviluppare un concetto generale di grandezze pluriestese, con il quale sarebbe stato possibile render conto della logica che si nasconderebbe nelle forme reali dello spazio, e poterne così determinare le relazioni metriche. La dimensionalità fu così da lui concepita in un ordine numericamente infinito di dimensioni definibili matematicamente. Le varietà discrete³ di Riemann offrono la possibilità di

² Queste idee furono accolte da Einstein dopo che ebbe formulato la teoria della relatività ristretta. Com'è noto, questa teoria predice che le distanze e gli intervalli di tempo dei sistemi fisici di riferimento possono contrarsi e dilatarsi, per decelerazione e accelerazione, lungo la direzione del moto. Einstein intuì un legame tra gravitazione e geometria dello spazio-tempo, e il riferimento cardine della sua teoria era il *principio di equivalenza*, in base al quale gli effetti locali della gravità sono equivalenti agli effetti di un sistema di riferimento accelerato. Questo principio era già accertato sperimentalmente ma non ancora ben compreso dalla scienza. Infatti, il principio di equivalenza si riferisce alla massa inerziale e alla massa gravitazionale (massa a riposo). La teoria poté così essere generalizzata, estesa cioè agli effetti della gravità, facendo un'ulteriore predizione: le distanze e il tempo, oltre a dilatarsi e a contrarsi, si incurvano, si distorcono, e alla curvatura è associata la gravità. Lo spazio-tempo, per essere soggetto a distorsioni causate dalla presenza di massa richiedeva una geometria atta a giustificare il campo unitario e pullulante di vibrazioni causate da quelle interazioni che si svolgono fra i diversi punti materiali e che vengono abitualmente associate a forze.

³ Le varietà riemanniane sono basate, oltre che sull'idea di spazi pluridimensionali, sulla nozione di curvatura elaborata da Gauss. Ad esse è stato applicato il calcolo differenziale infinitesimo elaborato da Gregorio Ricci-Curbastro e da Tullio Levi-Civita.

fissare un modello di collegamento tra geometria e fisica con utili soluzioni a problemi della scienza contemporanea.

Nel 1867, il fisico inglese William Thomson (1824-1907), in seguito noto con il nome di Lord Kelvin, dopo un lungo periodo di riflessioni sulla struttura della materia ipotizzò che questa fosse costituita di piccolissimi *nodi* da lui chiamati “atomi vortice” o “atomi mulinello”. Ciascuno di tali atomi era da lui concepito come un’onda che si incurva e si avvolge in uno spazio ristretto e che, dopo un cammino più o meno complicato, finisce col chiudersi su se stessa. Gli atomi vortice, a seconda del tipo di nodo che formano, possiedono specifiche proprietà fisico-chimiche, cosicché possono esistere separatamente oppure collegarsi fra loro per formare molecole.

Un’altra idea interessante sul modo di concepire la materia, lo spazio vuoto e la loro reciproca relazione apparve nel 1870, quando il filosofo e matematico inglese William K. Clifford (1845-1879) pubblicò la sua opera “Filosofia della Natura della Materia”, in cui descriveva un modello sulla morfologia dello spazio. Per la prima volta fu abbandonato il concetto filosofico di sostanza in favore di un’idea cosmologica di *pura morfodinamica*.

Clifford è stato il primo scienziato a immaginare che le particelle cosiddette “materiali” siano essenzialmente *nodi* o grumi dello spazio vuoto. In base a tale ipotesi, l’universo in tutte le sue varietà espressive altro non sarebbe che un gioco di sola forma prodotta dalla capacità del vuoto di autorganizzarsi. A quel tempo queste idee non incontrarono molti entusiasmi, ma furono poi guardate con un certo interesse da Einstein che, a tempo debito, le trovò utili per lo sviluppo della teoria della relatività generale.

Le idee di Clifford vennero anche riprese nel 1960 dal fisico John Wheeler (1911-2008) che tentò di mettere a punto un modello del mondo basato su nient’altro che la pura geometria dello spazio-tempo vuoto, da lui chiamata “geometrodinamica”. Wheeler, riproponendo la geometria di Riemann per il continuo-spazio-temporale e corredandola di nuove idee, sperava di giungere ad una visione unitaria e coerente delle particelle nella loro interconnessione con le varie forze della natura.

Una delle idee più curiose di Wheeler fu quella di “*gallerie di tarlo*”, immaginando che la presenza di una particella carica costituisse l’ingresso ad un microscopico cunicolo nello spazio che la metterebbe in comunicazione con un’altra particella identica ma con carica opposta in un altro luogo dell’universo. Per diverse ragioni di incompletezza, la teoria venne abbandonata dallo stesso autore, che soprattutto si rese conto di non poter spiegare la natura dello spazio-tempo introdotto nella teoria per averne una base costruttiva. Egli ripose poi la sua fiducia in uno studio più approfondito della fisica quantistica, convinto che prima o poi si sarebbe potuto riconoscere nel quanto elementare d’azione di Planck, piuttosto che nello spazio-tempo, il cosiddetto mattone fondamentale della natura.

Non passarono molti anni che qualcun altro intravide nella teoria di Wheeler una limitazione diversa da quella da lui stesso riconosciuta, e precisamente nel fatto che il suo modello era basato su quattro sole dimensioni (tre spaziali e una temporale). Entrò così in scena una vecchia proposta di Theodor Kaluza (1824-1907) e Oscar Klein (1894-1977),⁴ che prevedeva l’esistenza di un’extra dimensione spaziale arrotolata a guisa di un microscopico *cappio*.

4 Lo scienziato polacco Theodor Kaluza, dotato di una spiccata immaginazione per i processi fisici, nel 1921 si sentì tentato di estendere la teoria della relatività generale di Einstein, incorporandovi l’elettromagnetismo, fornendo quindi una prima impostazione geometrica alla teoria dei campi. Kaluza trovò così il modo di mostrare come l’elettromagnetismo sia a tutti gli effetti una forma di gravità associata allo spazio-tempo attraverso una quinta dimensione. Dunque, la sua idea, semplice ma geniale, consisteva nel caratterizzare la teoria dell’elettromagnetismo, così com’era stata formulata da Maxwell, con un’extra dimensione a noi non accessibile. Nell’universo a cinque dimensioni di Kaluza il campo gravitazionale si comporterebbe come la somma di due campi indistinguibili: quello della gravità e quello dell’elettromagnetismo, che noi invece distinguiamo sensibilmente, essendo condizionati dal punto di vista di uno spazio-tempo quadridimensionale. Secondo i ragionamenti di Kaluza, un’onda elettromagnetica o una particella altro non sarebbero che un’increspatura o un movimento nella quinta dimensione. Attraverso questa concezione geometrica, il campo unificato apparirebbe come una pura strutturazione dinamica del vuoto. Ma come immaginare uno spazio-tempo pentadimensionale? Fu il fisico svedese Oscar Klein a fornire nel 1926 una risposta al quesito di come visualizzare la dimensione extra di Kaluza: questa sarebbe arrotolata in una circonferenza così microscopica, o cappio, da confondersi con un punto dello spazio (cosicché, se potessimo esplorare una linea dello spazio, questa ci apparirebbe come un percorso cilindrico). I cappi non si troverebbero nello spazio, ma essi stessi lo estenderebbero. La visualizzazione di uno spazio quadridimensionale non è tuttavia permessa, e per questo si può ricorrere soltanto ad una rappresentazione bidimensionale. Klein riuscì a calcolare la circonferenza dei cappi servendosi del rapporto fra il valore sperimentale dell’unità di carica elettrica trasportata dalle particelle e il valore dell’intensità della forza gravitazionale: il rapporto risultò pari a circa 10^{-32} cm.

Questa proposta, insieme alla nozione di gallerie di tarlo introdotta da Wheeler e agli ultimi sviluppi della teoria dei campi quantistici (al tempo delle ideazioni di Kaluza e Klein non era ancora nota l'esistenza dei campi nucleari debole e forte), si rivelò un contributo essenziale alla nascita delle teorie geometrodinamiche delle *stringhe* e delle *superstringhe*, chiamate in generale "teorie di Kaluza-Klein". Le stringhe avrebbero sostituito i punti che prima rappresentavano gli elementi base della natura, cioè i quanti.

Yoichiro Nambu (1921-2016), docente di fisica all'Università di Chicago, è stato uno dei primi fisici teorici a suggerire l'idea di stringhe (o corde). Verso la fine degli anni Cinquanta, egli impostò il primo modello basato sulle stringhe, che però riguardava soltanto alcune particelle elementari. Nella concezione di Nambu una stringa è un "oggetto" monodimensionale della lunghezza di circa 10^{-13} cm che può ruotare e che, avendo una sua tensione intrinseca, può vibrare in una infinità di *modi* alla velocità della luce. Il suo modo fondamentale implica la frequenza più bassa e ad essa corrisponde una particella elementare.

Il modello proposto da Nambu si è evoluto per un ventennio nell'intento, non riuscito, di eliminare alcuni problemi che condurrebbero a contraddizioni. Ad esempio, poiché le sue stringhe oscillano alla velocità della luce, non si sa come spiegare la presenza delle particelle dotate di massa. Inoltre, dato che le stringhe interagiscono congiungendosi e dividendosi, e dato che le loro estremità rappresentano una sorta di marchio di riconoscimento, non si può escludere che le due estremità di una stringa si congiungano fra loro formando un *loop* chiuso, ma in questo caso non si saprebbe quale senso assegnare a un tale oggetto privo di spiccate caratteristiche topologiche per poter interagire con altri loops e dar luogo a processi di auto-organizzazione.

Chi invece è considerato il padre fondatore di oggetti primordiali estesi chiamati "stringhe" e introdotti per la ricerca di una teoria di completa unificazione dei campi, ovvero della *gravità quantistica*, è il fisico italiano Gabriele Veneziano (1942), che nel 1968 al CERN di Ginevra, nel corso di sue analisi su alcuni dati sperimentali concernenti la forza nucleare forte, trovò che una vecchia formula di Eulero chiamata "funzione beta", da lui ideata per descrivere un insieme di curve geometriche, risultava idonea anche per una descrizione matematica coerente delle interazioni fra le particelle elementari nel contesto del Modello Standard.

Claude Lovelace (1934-2012) della Rutgers University lavorò sulle implicazioni delle stringhe di Nambu e scoprì che l'equazione atta a descriverle conteneva un termine che, per essere relativisticamente corretto, doveva dare zero come risultato, e ciò comportava che la stringa monodimensionale avrebbe soddisfatto le richieste della relatività generale soltanto se vibrasse in uno spazio a ventisei dimensioni (delle quali una temporale, tre dello spazio ordinario e ventidue arrotolate in una microstruttura).

Dopo i successi ottenuti nei primi anni Settanta dalla teoria quantistica che descrive le interazioni forti (Cromo Dinamica Quantistica), il modello di Nambu finì con l'essere accantonato dalla comunità scientifica che preferiva dar credito a diversi tipi di approcci, quali le *teorie di grande unificazione (dei campi)* e la *supersimmetria*. Quest'ultima, chiamata anche SUSY (dall'inglese Super Symmetry), è uno schema teorico che permette di pensare la forza elettrodebole e la forza nucleare forte connesse alla forza gravitazionale. In altre parole, essa è ciò che si richiede per la *completa* unificazione dei campi.

La supersimmetria prevede la *supergravità*, una teoria della gravità quantistica descritta come una teoria di Kaluza-Klein, ed è considerata da molti studiosi un requisito fondamentale per una qualsivoglia descrizione autoconsistente dell'universo fisico. Essa, oltre alle particelle note con *spin* $\frac{1}{2}$, 1 e 0, prevede anche l'esistenza di una particella di massa zero e *spin* 2 chiamata "gravitone" (una stringa che, secondo la teoria, vibra con un'ampiezza d'onda pari a zero), responsabile di trasferire la forza gravitazionale tra le masse. Mentre la gravità convenzionale non pone alcun limite al numero delle dimensioni dello spazio-tempo, la supergravità pone un limite non superiore a *undici dimensioni*. Ovviamente, quando si parla di dimensioni spaziali in numero maggiore di tre, dato il loro carattere di astrattezza, le si possono intendere come proprietà definibili matematicamente oppure come *quasi-dimensioni*.

Per comprendere la nozione di supersimmetria, si deve tener conto della ripartizione che i fisici fanno delle particelle in due classi distinte: da una parte le particelle di scambio di forza con spin intero, chiamate “*bosoni*” e, dall’altra, le particelle con *spin semintero*, chiamate “*fermioni*”.⁵ La supersimmetria richiede semplicemente che per ogni particella fermionica misurata in unità quantistiche, esista una corrispondente particella bosonica, chiamata “superpartner”, e viceversa.

Particella e superpartner hanno la stessa massa, mentre lo spin del superpartner è diminuito di $\frac{1}{2}$ rispetto alla particella di partenza. Pertanto, in base alla SUSY, l’elettrone, il quark e il neutrino, che hanno spin $\frac{1}{2}$, hanno come corrispettivi superpartner, lo *s-elettrone* lo *s-quark* e lo *s-neutrino*, tutti e tre con spin 0, mentre al fotone, al gluone e ai bosoni W e Z, che hanno spin 1, corrispondono, nell’ordine, il *fotino*, il *gluino*, il *wino* e lo *zino*, tutti con spin $\frac{1}{2}$; infine, al gravitone, che ha spin 2, corrisponde il *gravitino* con spin $\frac{3}{2}$.⁶

Dal momento che l’esistenza di questi tipi di particelle non è mai stata provata, e non volendo rinunciare tuttavia all’idea che esista una tale simmetria, si è portati a supporre che essa debba in qualche modo essere *rotta* e, dunque, difficilmente identificabile.

La supersimmetria è un’idea nata negli anni settanta. Poiché è riconosciuta l’esistenza di due famiglie distinte di particelle, e cioè i fermioni associati alla materia e i bosoni associati alle forze, la nozione di supersimmetria è stata introdotta allo scopo di giustificare questa separazione che la natura deve essere stata capace di operare, in modo tale che due aspetti diversi di una stessa cosa occultino la loro effettiva relazione.

D’altro canto era già accertato che un fotone (la particella messaggera che trasmette la forza elettromagnetica e che fa parte della famiglia dei bosoni) se dotato di sufficiente energia può trasformarsi, come previsto dalla teoria della relatività, in un elettrone più un positrone (particelle, queste ultime, che fanno parte della famiglia ben distinta dei fermioni) e viceversa. Chiaramente, questo processo fisico è caratterizzato dalla simmetria. Non sembra invece possibile trasformare un fotone in un elettrone e viceversa, per cui rimane difficile comprendere la presenza di quella *massa netta* che costituisce il nostro universo apparentemente asimmetrico (la quantità di materia visibile non risulta essere controbilanciata da una equivalente quantità di antimateria); sembra dunque ragionevole supporre che e a fronte di tale asimmetria sia all’opera una qualche forza compensativa.

Si è allora pensato che, in generale, ogni simmetria richieda un *campo di gauge*,⁷ la cui caratteristica consiste nel conservare l’invarianza globale di simmetria nonostante le trasformazioni che il campo patisce in ogni suo punto. E poiché la supersimmetria è un concetto geometrico, i teorici dei campi quantistici hanno cercato di esplorare un suo possibile collegamento con la gravità, che nella teoria della relatività generale è presentata, appunto, in chiave essenzialmente geometrica dello spazio-tempo. La proprietà della geometria dello spazio-tempo di incurvarsi o

⁵ I campi delle interazioni tra le particelle materiali (quelle facenti parte della famiglia dei *fermioni*, caratterizzati da *spin semintero*, ove il termine *spin* denota il momento angolare intrinseco della particella) sono associate a quattro forze che risultano operare in modo fra loro indipendente, e sono interpretate come scambio di altre particelle (*quanti*) chiamate “messaggere” (quelle facenti parte della famiglia dei *bosoni*, caratterizzati da *spin intero*). La *forza gravitazionale* è la più debole, ha un raggio d’azione illimitato e agisce su tutta la materia. La sua pur debole intensità d’azione è dunque cumulativa, cosicché fa sentire apprezzabilmente i suoi effetti su larga scala. Il *gravitone* è l’ipotetica particella messaggera responsabile di trasmettere la forza. Segue, in ordine di intensità, la *forza nucleare debole*, tipica del decadimento neutronico (chiamato più propriamente *decadimento beta*) in cui un neutrone si trasforma in un protone, un elettrone e un antineutrino elettronico (trasformazione che è alla base dei processi di fusione all’interno delle stelle). La forza nucleare debole ha raggio breve d’azione (10^{-15} cm) e agisce su tutte le particelle tranne che sui fotoni. Le sue particelle messaggere sono i *bosoni* (W^+ , W^- e Z^0), la cui esistenza era stata prevista verso la fine degli anni sessanta da Steven Weinberg e da Abdus Salam e confermata sperimentalmente nel 1983 al CERN di Ginevra sotto la direzione di Carlo Rubbia, per mezzo del grande acceleratore superprotosincrotrone. C’è poi la *forza elettromagnetica* (tipica delle reazioni chimiche). Il suo raggio d’azione è infinito (per raggio infinito d’azione si intende che l’intensità della forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza). La sua azione interessa esclusivamente le particelle che possiedono una carica elettrica. La particella messaggera è il *fotone*. Infine, c’è la *forza nucleare forte*, che ha un raggio d’azione breve (10^{-13} cm). Essa agisce su *quark* e *gluoni* che sono gli ipotetici costituenti elementari degli *adroni* (*protoni* e *neutroni* che formano la famiglia dei *barioni*, costituiti da tre *quark*, mentre *pioni*, *kaoni* ed altre particelle formano la famiglia dei *mesoni*, costituiti da un *quark* e un *antiquark*). Le loro particelle messaggere sono i *gluoni*.

⁶ Come si può notare, i superpartner dei bosoni assumono il nome con la desinenza “ino”, mentre quelli dei fermioni prendono il prefisso “s-”.

⁷ “Gauge” significa calibro o strumento di misura.

distorcersi viene perciò interpretata come campo di gauge. In questo senso, la gravità è ciò che compensa gli effetti della curvatura dello spazio-tempo, e in una geometria curva il cammino più breve è quello che riflette, assecondandola, tale curvatura.

Verso la fine degli anni settanta, alcuni studiosi ripresero a lavorare sulle stringhe, consapevoli però che, per poter render conto dell'esistenza delle due diverse famiglie di particelle (fermioni e bosoni), si richiedeva un modello spaziale ad almeno dieci dimensioni. Includendo la gravità, si sarebbero concepite le stringhe come microstrutture fondamentali di lunghezza pari a quella di Planck ($1,616 \times 10^{-33}$ cm), di spessore nullo e ripartite in tre dimensioni spaziali, una temporale e sette dimensioni arrotolate su se stesse, ovvero compatte in eptasfere. Le stringhe vibrano in infiniti modi e, come già ipotizzato da Nambu, il modo fondamentale della vibrazione caratterizza una particella nel suo stato fondamentale o di minima energia. Tutte le particelle classificate nel Modello Standard sono conseguenza delle diverse modulazioni di frequenze più basse.

Le diverse teorie di stringa o superstringa, incluse alcune loro varianti più moderne, sono nate in contrapposizione con la concezione puntiforme delle particelle, al fine di evitare gli effetti problematici degli *infiniti* derivanti dal calcolo delle grandezze fisiche, e sono state guardate dalla scienza in varie occasioni come una felice promessa per la formulazione di una concezione nuova e unitaria della realtà, visto che le stringhe sono sicuramente più trattabili dei punti geometrici e adatte a fornire una spiegazione intuitiva della natura "discreta" della meccanica quantistica.

Le teorie di superstringa sono caratterizzate dall'esistenza di un numero di dimensioni spaziali compreso tra nove e venticinque, più una temporale. Nelle loro varie formulazioni è tornata molto utile quell'idea di *loop chiuso* che aveva rappresentato un ostacolo alle precedenti ricerche di Nambu.

La *Teoria delle Superstringhe* a dieci dimensioni di Michael Green (1946) e John H. Schwarz (1941), nata dalla fusione dei concetti di *stringhe* e *supersimmetria*, è subito sembrata molto credibile per la risoluzione di tutti i problemi. In essa i costituenti elementari sono oggetti estesi che possono ruotare, vibrare e interagire fra loro, oltre che a descrivere campi e forze senza incorrere in paradossi.

Dopo la pubblicazione della sua versione finale avvenuta nel 1984 (anno ricordato come *prima rivoluzione delle superstringhe*), si è anche sperato che essa fosse veramente una teoria fisica completa, fosse cioè in grado di unificare la gravità e la fisica quantistica, e di descrivere tutta la varietà di fenomeni della nostra esperienza.⁸ C'è però da osservare che sono state formulate ben cinque teorie di superstringa, ciascuna basata su uno schema interpretativo del tutto diverso rispetto alle altre. Pertanto, o quattro di esse sono sbagliate o, cosa ancor più plausibile, lo sono tutte e cinque.

Verso la metà degli anni novanta, queste teorie hanno conosciuto una *seconda rivoluzione* per merito del fisico statunitense Edward Witten (1951), che le ha interpretate come cinque aspetti diversi di una teoria più fondamentale a undici dimensioni chiamata "Teoria M".⁹

Le Teorie di superstringa, essendo concepite geometricamente e dinamicamente, sono presentate nei loro rispettivi modelli teorici come oggetti associati non solo alle particelle, ma anche alle forze che agiscono su di esse.

Il grande successo delle superstringhe sta nel fatto che, in seguito al lavoro di Witten, da queste teorie emergono soltanto due modelli possibili di simmetria fra cui scegliere, anziché una grande varietà di modelli che renderebbe molto più imbarazzante il criterio di scelta per capire quale tra essi sia il più credibile. Entrambi i modelli hanno il pregio di offrire, accanto alle formulazioni matematiche, un sostegno geometrico, che tuttavia non presenta alcuna novità significativa per

⁸ Dalla teoria sarebbero tuttavia escluse le spiegazioni di fenomeni complessi, soprattutto quello dell'esperienza conscia.

⁹ La Teoria M (Teoria Madre) è una branca della fisica che riprende l'insieme delle teorie delle Superstringhe fra loro concorrenti ed è basata sull'idea di oggetti chiamati "brane", ovvero membrane bidimensionali (o quadridimensionali secondo alcuni teorici) che si muovono in undici dimensioni e la cui attività produrrebbe come risultato l'insieme completo della realtà fisica, e cioè spazio, tempo, materia e forza.

superare gli schemi tradizionali riguardanti la logica dello spazio, in quanto concepito come uno sfondo *continuo* in cui si trovano ad agire le grandezze estese. Pertanto, ciò che è discutibile nelle geometrie classiche è altrettanto discutibile in queste teorizzazioni: i punti adimensionali vengono semplicemente ignorati e si pone l'accento soltanto sulle grandezze estese (stringhe e brane), introdotte arbitrariamente e senza una soddisfacente spiegazione dei loro aspetti qualitativi.

L'interesse verso le teorie di superstringa è andato ultimamente spegnendosi a causa di una serie di debolezze ravvisate al loro interno, prima fra tutte il controllo sperimentale dovuto all'estrema piccolezza degli oggetti da scandagliare. Infatti, l'energia richiesta per poterli osservare può essere prodotta da acceleratori di particelle la cui circonferenza abbia una lunghezza di circa 10^{18} chilometri, quindi, fuori dalla portata di un realistico sviluppo tecnologico attualmente immaginabile. Manca poi una soddisfacente descrizione del processo di compattificazione delle stringhe e non viene giustificato il meccanismo responsabile della rottura di simmetria.

Sarà adesso utile ricordare che negli ultimi decenni alcuni gruppi di scienziati si sono messi alla ricerca di nuove teorie fisiche basate su modelli matematici in grado di descrivere l'universo primitivo nella sua iniziale semplicità. La loro idea è quella di poter formulare una sola e semplice equazione dalla quale siano derivabili tutti i parametri fondamentali.

Tra le varie proposte, la teoria delle *superstringhe* è quella che ha suscitato il maggiore interesse scientifico. I suoi autori, i fisici Michael Green (1946) e John Schwarz (1941), vi hanno lavorato circa un ventennio, rimaneggiando le teorie delle stringhe che erano state precedentemente elaborate e nelle quali i costituenti elementari della natura venivano proposti, anziché in termini di corpuscoli puntiformi, come oggetti monodimensionali in grado di ruotare, vibrare e interagire tra loro andando a costituire uno spazio-tempo a dieci dimensioni. Poco dopo la pubblicazione della sua versione finale, avvenuta nel 1984, si è anche sperato che la teoria delle superstringhe fosse in grado di unificare la gravità e la fisica quantistica senza incorrere in paradossi, e di descrivere così tutta la varietà di fenomeni della nostra esperienza, escludendo però il fenomeno più misterioso, quello della stessa esperienza, e cioè la coscienza.

Negli ultimi anni, la teoria delle superstringhe è stata oggetto di attente critiche e al suo interno sono state ravvisate non poche debolezze che hanno fatto scemare l'interesse da parte della scienza ufficiale; oltre all'improbabile controllo sperimentale della teoria, dovuto all'estrema piccolezza degli oggetti da scandagliare, c'è da considerare l'alto grado di astrattezza e complessità del modello matematico di cui essa si serve. Ma la ragione più importante per la quale questa teoria non possiede le caratteristiche desiderabili della completezza risiede, come credo, oltre che nel non fornire una spiegazione del perché esistano le superstringhe e della logica che le governa, nel fatto di non includere la coscienza, e cioè il più familiare tra tutti i fenomeni e, allo stesso tempo, il più misterioso.

FORME SEMPLICI

Come già accennato nell'introduzione, due dei principali successi che hanno portato alla formulazione della MQ sono stati la scoperta dell'atomo da parte di Rutherford nel 1910 e la successiva spiegazione della sua stabilità da parte di Bohr. In seguito, si è scoperto che gli atomi

sono composti di “oggetti” molto più piccoli: gli *elettroni* che orbitano attorno a un nucleo di ridottissime dimensioni, i *protoni* e i *neutroni* che compongono il nucleo e, infine, i *quark* che a gruppi di tre, a loro volta, costituiscono il protone e il neutrone.

Dalle collisioni con acceleratori di particelle sempre più potenti e sofisticati si è anche dedotta l'esistenza di una particella piuttosto elusiva cui è stato dato il nome di “neutrino”. *Elettrone, quark e neutrino*,¹⁰ ciascuno connotato con specifiche proprietà, sono oggi considerati dagli studiosi di fisica atomica le particelle davvero elementari e stabili che compongono tutta la materia ordinaria di cui abbiamo esperienza.

Non si può tuttavia escludere che in futuro, disponendo di energie di gran lunga maggiori di quelle attuali, queste tre particelle possano risultare composte di parti ancora più piccole. Qualcuno in vena di speculazioni fantasiose potrebbe pensare che le particelle siano pozzi senza fondo, una gerarchia di strutture analoga a un gioco interminabile di scatole cinesi, il che farebbe cambiare drasticamente il volto della fisica. Gli atomisti, nel senso etimologico della parola, non prendono sul serio questa ipotesi e aspirano tenacemente ad avere a che fare con i costituenti ultimi della natura. E' tuttavia discutibile il loro metodo di ricerca, perché basato su una filosofia riduzionista che pretende di spiegare la cosiddetta “materia” spaccandola in pezzi sempre più piccoli, ma che non è di alcun aiuto ad immaginare il concetto di elementarità riferito ad un suo frammento ultimo non nullo.

Nell'insieme delle nostre esperienze sensibili e intellettive non figura alcun oggetto che possa essere descritto come semplice nel senso di essere non ulteriormente scomponibile. La nozione di semplicità è sfuggente e, finché non avrà ricevuto una definizione soddisfacente, ci si dovrà limitare ad adottare un criterio comparativo, in base al quale non si avrà alcuna difficoltà a stabilire quale fra due o più oggetti sia il più semplice confrontandone il grado di complessità. Per esempio, possiamo asserire senza ombra di dubbio che un singolo elemento del cubo di Rubik è più semplice (ma sarebbe più corretto dire “meno complesso”) del cubo stesso.

Attenendoci a tale criterio, ci potrebbero attrarre i cinque poliedri regolari convessi, chiamati anche “solidi platonici”, e la sfera in cui essi sono inscrivibili e dalla quale sono circoscrivibili. L'idea di semplicità è in tal caso associata alla regolarità dei loro elementi compositivi e al loro grado di simmetria. Questi sei oggetti, pur essendo idealizzazioni pertinenti al mondo dell'astrazione matematica, sono stati adottati in varie occasioni come modello di riferimento in specifici ambiti della scienza (e lo sono ancor oggi in cristallografia), anche se non è affatto plausibile che essi possano rappresentare fedelmente forme proprie del mondo fisico. Ciò nondimeno, inviterei il lettore a riflettere su questi oggetti della geometria classica, partendo dallo studio delle loro caratteristiche attraverso le simmetrie, ovvero i moti rigidi che fissano il centro della figura e la mandano in sé (nel senso che la lasciano invariata). Si ha, ad esempio, che le simmetrie della sfera sono date da tutte le rotazioni di un angolo qualsiasi rispetto a qualsiasi asse passante per il suo centro, nonché da tutte le riflessioni rispetto a qualsiasi piano passante per il suo centro.

Le simmetrie delle suddette figure sono riportate qui di seguito nella Tabella 1, nella quale viene anche specificato il numero dei rispettivi lati, vertici e facce. Come si può facilmente verificare, indicato con m il numero totale di simmetrie, in base alla nota formula di Eulero si ha

$$m = 2(L + V + F - 2).$$

¹⁰ In natura si conoscono sei diversi sapori di leptoni raggruppati in tre distinte famiglie chiamate “doppietti elettrodeboli”: l'elettrone (e^-) e il neutrino elettronico (ν_e), il muone (μ^-) e il neutrino muonico (ν_μ), il tauone (τ^-) e il neutrino tauonico (ν_τ); tutti i leptoni hanno spin $\frac{1}{2}$, l'elettrone, il muone e il tauone hanno carica elettrica negativa e masse rispettive (espresse in MeV) di 0,511, 105,8 e 1860, mentre i neutrini non hanno carica e, a quanto si suppone, possiedono una massa molto piccola compresa tra 0,5 e 5 eV. In base alla CDQ, i quark sono conosciuti in sei sapori diversi: up (u), charm (c) e top (t) hanno carica $\frac{2}{3}$, mentre down (d), strange (s) e bottom (b) hanno carica $-\frac{1}{3}$; tutti e sei hanno spin $\frac{1}{2}$, carica di colore e masse approssimative, in MeV (mega-elettronvolt), di 10 per u e per d , di 200 per s , di 4800 per b , 1800 per c e $1,5 \times 10^5$ per t .

Tabella 1

Solido	Lati (<i>L</i>)	Vertici (<i>V</i>)	Facce (<i>F</i>)	Simmetrie di Rotazione	Simmetrie di Riflessione	Simmetrie totali (<i>m</i>)
Sfera	-	-	-	Infinite	Infinite	Infinite
Icosaedro	30	12	20	60	60	120
Dodecaedro	30	20	12	60	60	120
Ottaedro	12	6	8	24	24	48
Esaedro o cubo	12	8	6	24	24	48
Tetraedro	6	4	4	12	12	24

La fisica contemporanea non trova alcun interesse in queste figure per un semplice motivo: esse hanno lati, vertici e superfici che non si prestano ad essere interpretati come proprietà degli oggetti reali del complesso mondo macroscopico,¹¹ e neppure degli oggetti microscopici di cui quelli sono costituiti.

Inoltre, nessuno di questi oggetti potrebbe essere visto come semplice, nel senso di essere indivisibile. Infatti, ciascun solido può essere idealmente tagliato in parti sempre più piccole senza mai incontrare, in linea di principio, una fine. In particolare, il cubo può essere tagliato in 2^3 , 3^3 , $4^3 \dots n^3$ cubi (con n intero grande a piacere), e il tetraedro tagliato in 2^2 , 2^4 , $2^6 \dots$, 2^n (con n pari) tetraedri più, corrispondentemente, 2^0 , 2^2 , $2^4 \dots$, $2^{(n-2)}$ ottaedri.

I fisici teorici vorrebbero appropriarsi di un'idea intuitiva di semplicità, ma questa sembra inafferrabile, cosicché preferiscono tagliar corto ed assumere che nel modello standard della fisica atomica le particelle materiali semplici siano associabili a punti adimensionali e, dunque, prive di struttura (qualcuno direbbe prive di senso, ma pare che in fisica non si possa fare a meno di ricorrere ad un ampio grado di astrazione).

Come noto, il modello di *corpuscolo puntiforme*, pur essendosi rivelato uno strumento straordinariamente efficace e in apparenza irrinunciabile per i fisici teorici, lascia insoluti diversi problemi, come ad esempio quello (forse il più importante) di inglobare nella teoria standard delle particelle l'interazione gravitazionale. Io credo invece che il problema prioritario, senza la cui soluzione la scienza non potrebbe mai aspirare ad una svolta significativa, è proprio quello di come descrivere razionalmente il concetto fisico di semplicità.

Supponiamo di disporre di un acceleratore di particelle così potente da garantire che l'elettrone, il quark e il neutrino siano realmente i costituenti ultimi della materia. I fisici teorici dovrebbero ora mostrarsi interessati a rispondere alle seguenti domande:

- (1) Perché mai queste particelle, pur considerate assolutamente semplici e pur avendo tutte e tre spin semintero ($\frac{1}{2} \hbar$), possiedono masse molto diverse tra loro?
- (2) Perché la carica degli elettroni è unitaria e quella dei quark è frazionaria ($2/3$ e $-1/3$)?
- (3) Perché, infine, il neutrino è privo di carica?

¹¹ Una sfera di cristallo puro ci dà l'impressione di essere omogenea, in altre parole, assolutamente piena e priva di discontinuità, ma solo perché il nostro apparato visivo è limitato e non ci permette di percepirne la grana fine.

A questo punto è chiaro che la nozione di semplicità dovrebbe in qualche modo conciliarsi con proprietà alquanto distinte fra loro. In altre parole, a fronte di un'eventuale raffigurazione di particelle semplici, ciascuna dotata di esclusive proprietà meccaniche, dovrebbe corrispondere una molteplicità di rappresentazioni con caratteristiche diverse l'una dalle altre.

E' a questa conclusione che tenterò di dare un certo credito nel corso del presente capitolo e di quello successivo (Onde...Sferiche), proponendo il (mio) concetto fisico-matematico di semplicità e mostrandolo, appunto, in una gamma molto ampia di *rappresentazioni*. Non a caso ho inizialmente invitato il lettore a riconsiderare la sfera e i solidi platonici, perché è proprio da questo insieme di idealizzazioni che ho potuto intuire un tale concetto.

Le unità elementari qui proposte riceveranno il nome generale di "loops" e saranno descritte essenzialmente in termini geometrici e meccanici e, in casi particolari, anche matematici. Come si vedrà, i loops saranno in grado di suggerire l'idea di auto azione o, più precisamente, di flussione autoreferenziale¹² dello spazio vuoto, e saranno configurati come curve chiuse *dello* spazio tridimensionale, nonché come superfici e volumi, aventi tutti la proprietà di (poter) ruotare attorno a un numero n di assi con $n \geq 3$. Inoltre, le proprietà geometriche e meccaniche dei loops consentiranno di comprendere come questi possano assemblarsi per formare una grande varietà di forme composte chiamate "strutture armonicamente organizzate" o, più semplicemente strutture armoniche (in breve "SA").

1. *Una forma semplice*

"All'inizio, la Sfera e il Tetraedro erano uniti in una sola Forma impensabile, inimmaginabile."

A questo *rompicapo* che sorregge un mito della tradizione indù si richiama *Il Monte Analogo* [1], ultimo racconto di René Daumal, rimasto fatalmente interrotto nel mezzo di una frase del quinto capitolo. Curiosamente, nel corso di una mia ricerca intrapresa quando ancora non conoscevo questo racconto e l'esistenza di quel mito, ho ideato un oggetto piuttosto semplice che potrebbe fornire una risposta al citato rompicapo: un'immagine di sfera e tetraedro armonicamente confusi in un unicum spaziale, alla cui base c'è la curva che qui di seguito descrivo.

Consideriamo un tetraedro regolare di lato unitario e una sfera con centro O nel baricentro del tetraedro e raggio $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ pari alla distanza di O dal punto medio del lato (figura 1). La loro intersezione è data dalle quattro circonferenze inscritte nelle facce del tetraedro (figura 2). Indicati con A, B, C, D, E, F i punti medi dei lati del tetraedro, su dette circonferenze selezioniamo il seguente cammino: partendo da A , in senso orario, prendiamo l'arco di $2/3$ di circonferenza fino al punto B (figura 3) e da questo, in senso antiorario, prendiamo nella faccia consecutiva un uguale arco di circonferenza fino al punto C . Di qui continuiamo, con lo stesso criterio, prendendo l'arco di circonferenza CD e, infine, l'arco DA , tornando quindi al punto iniziale.

¹² Il concetto di flussione autoreferenziale viene qui proposto come una proprietà qualitativa di natura fisico-matematica, e sarà mostrato verso la fine del presente capitolo attraverso la simulazione di un oggetto elementare in movimento chiamato "LV" (volume di loop), in una sequenza di 32 immagini in cui è possibile cogliere il senso dell'autoazione e della retroazione.

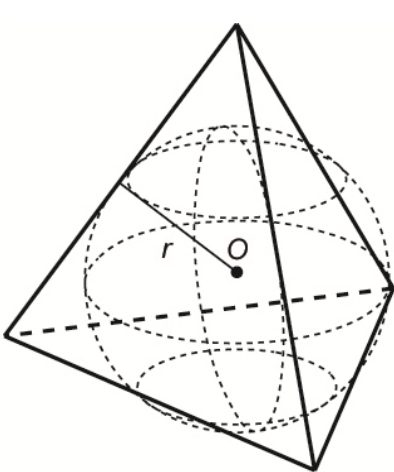


Fig. 1: relazione sfera-tetraedro

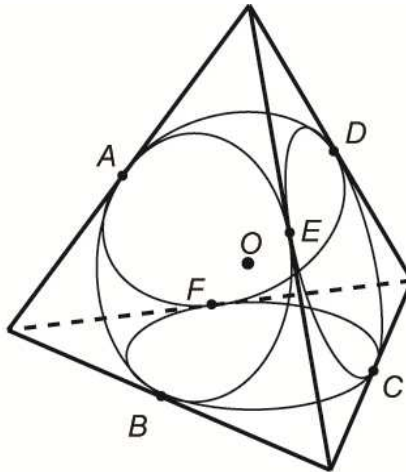


Fig. 2: intersezione

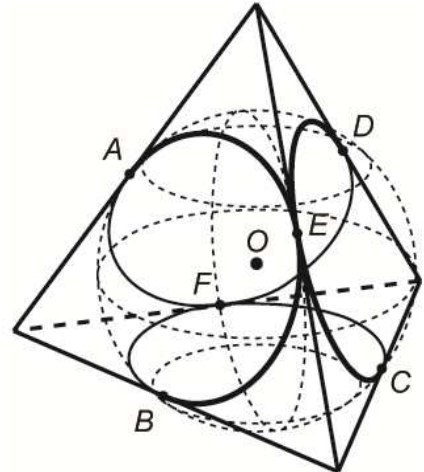


Fig. 3: cammino ABCDA

Chiamiamo la curva chiusa così ottenuta "*Curva di Loop_{2/3}*", brevemente $LC_{2/3}$ (figure 3 e 4). Inoltre, chiamiamo il centro O della sfera "*centro di $LC_{2/3}$* " (per costruzione O risulta equidistante da tutti i punti della curva) e il raggio della sfera "*raggio di $LC_{2/3}$* ", mentre chiamiamo i punti A, B, C, D, E, F "*punti critici di $LC_{2/3}$* ".

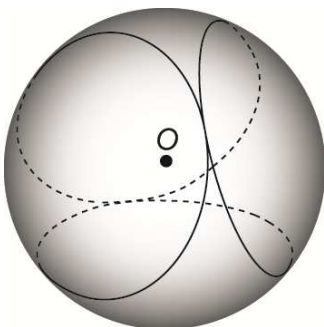


Fig. 4
Curva Loop_{2/3} ($LC_{2/3}$)

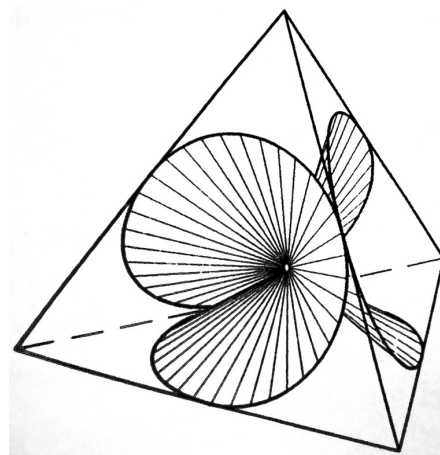


Fig. 5
Superficie Loop_{2/3} ($LS_{2/3}$)

Congiungendo i punti di $LC_{2/3}$ con il suo centro, si ottiene una superficie conica di vertice O che chiamiamo *Superficie di Loop_{2/3}*, brevemente $LS_{2/3}$ (figura 5). Il Volume di Loop_{2/3} ($LV_{2/3}$) sarà mostrato più avanti.

2. Equazione della curva $LC_{2/3}$

Ci proponiamo ora di trovare l'equazione di $LC_{2/3}$ e di definirne la curvatura e la torsione. Data una curva $LC_{2/3}$ inscritta nel tetraedro di lato unitario (figura 6), se ne otterrà un'equazione parametrica partendo dal suo sviluppo piano (figura 7) e parametrizzando dapprima i singoli archi α_2, α_3 e α_4 per poi ruotarli di un angolo opportuno attorno ad ognuno dei lati del triangolo centrale.

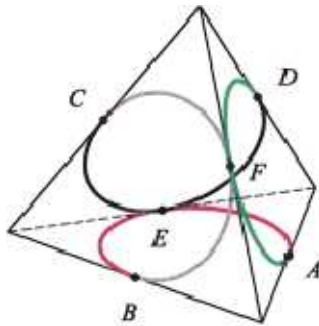


Fig. 6

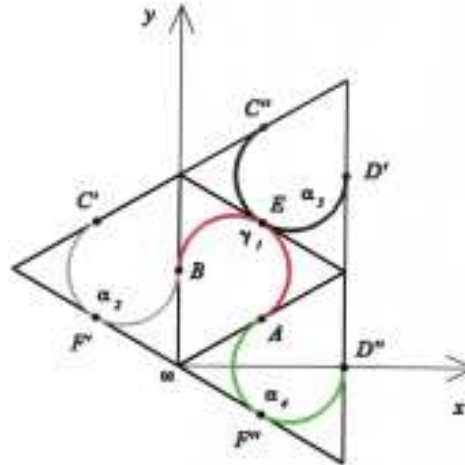


Fig. 7

Con questo procedimento, la curva $LC_{2/3}$ avrà la seguente equazione parametrica

Si consideri il tratto $\gamma_1 = AB$ che è parte della circonferenza (presa in senso antiorario) inscritta nel triangolo equilatero di lato $l = 1$, e quindi di raggio $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e centro $C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$, da cui le equazioni parametriche sono:

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 + \cos \theta) \\ y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \theta\right) \\ z = 0 \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right].$$

Per incollare in modo più comodo il tratto di curva γ_1 con quello posto sulla faccia successiva scegliamo di far variare il parametro θ nell'intervallo $\left[-\frac{4\pi}{3}, 0\right]$; a tale scopo utilizziamo la traslazione $\theta = t + \pi$ ottenendo così le equazioni¹³:

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 - \cos t) \\ y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin t\right) \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{4\pi}{3}, 0\right]$$

¹³ Si osservi che $\cos(t + \pi) = -\cos t$, $\sin(t + \pi) = -\sin t$.

Si veda che: $\gamma_1\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = A\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$, $\gamma_1(0) = B\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

Per trovare l'equazione del secondo tratto di curva (ovvero γ_2) partiamo dal tratto $\alpha_2 = BC'$ per poi ruotarlo attorno all'asse delle y in modo opportuno¹⁴.

α_2 è un arco della circonferenza di raggio $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e centro $C_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$ (è il simmetrico di C_1)

preso in senso orario, da cui le equazioni saranno¹⁵:

$$\alpha_2 = \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6}(-1 + \cos(-t)) \\ y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(-t)\right) \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$$

ovvero

$$\alpha_2 = \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6}(-1 + \cos t) \\ y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin t\right) \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$$

Effettuiamo ora la preannunciata rotazione ρ attorno all'asse y che, indicato con β l'angolo tra i due piani, dovrà essere di un angolo $\pi - \beta$ in senso orario in modo che la curva ruotata $\gamma_2 = \rho(\alpha_2)$ vada a posizionarsi nello spazio sulla faccia del tetraedro (fig.8).

La rotazione avrà equazioni

$$\rho = \begin{cases} x' = \cos(\pi - \beta)x + \sin(\pi - \beta)z \\ y' = y \\ z' = -\sin(\pi - \beta)x + \cos(\pi - \beta)z \end{cases}$$

¹⁴ Si può dimostrare che l'angolo β tra due facce del tetraedro è tale che $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

¹⁵ - t è motivato dall'orientamento orario del tratto di curva.

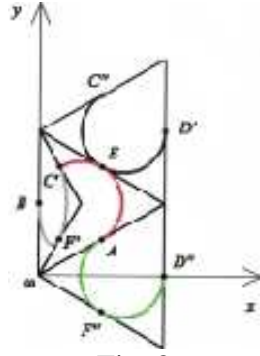


Fig. 8

ovvero, ricordando che si può dimostrare che $\cos \beta = \frac{1}{3}$, $\sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, si avrà:

$$\rho = \begin{cases} x' = -\frac{x}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}z \\ y' = y \\ z' = -\frac{2\sqrt{2}}{3}x - \frac{z}{3} \end{cases}.$$

Ne segue che $\gamma_2 = \rho(\alpha_2)$ avrà equazioni:

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{18}(1 - \cos t) \\ y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin t\right) \\ z = \frac{\sqrt{6}}{9}(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$$

Si veda che: $\gamma_2(0) = B\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ (e quindi si incolla con la curva γ_1), $\gamma_2\left(\frac{4\pi}{3}\right) = C\left(\frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Per trovare il terzo tratto di curva (ovvero γ_3) partiamo dal tratto $\alpha_3 = C''D'$ per ruotarlo attorno all'asse della retta in figura in modo opportuno. Per scrivere più comodamente l'equazione di α_3 usiamo il riferimento $(\omega'', x'', y'', z'')$, come in figura 9, rispetto al quale α_3 risulta essere l'arco di circonferenza di raggio $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e centro $C_3\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$ preso in senso antiorario, di equazione:

$$\alpha_3 = \begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 + \cos \theta) \\ y'' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin \theta\right) \\ z'' = 0 \end{cases} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$$

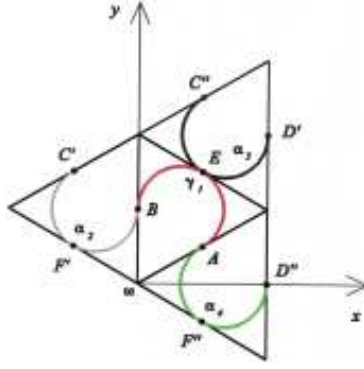


Fig. 9

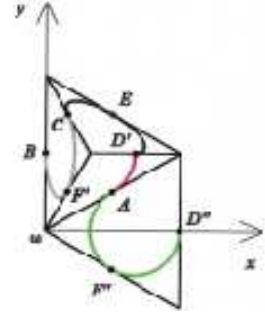


Fig. 10

Effettuiamo ora una rotazione ρ' attorno all'asse y'' che (indicato con β l'angolo diedro del tetraedro) dovrà essere di un angolo $\pi - \beta$ in senso antiorario in modo che la curva $\gamma_3 = \rho'(\alpha_3)$ si vada a posizionare sulla faccia del tetraedro (figura 10).

La rotazione avrà equazioni

$$\rho' = \begin{cases} x''^* = -\frac{x''}{3} - \frac{2\sqrt{2}z''}{3} \\ y''^* = y'' \\ z''^* = \frac{2\sqrt{2}x''}{3} - \frac{z''}{3} \end{cases}$$

ne segue che nel sistema $(\omega'', x'', y'', z'')$ la curva $\gamma_3 = \rho'(\alpha_3)$ avrà equazioni:

$$\gamma_3 = \begin{cases} x'' = -\frac{\sqrt{3}}{18}(1 + \cos\theta) \\ y'' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right) \\ z'' = \frac{\sqrt{6}}{9}(1 + \cos\theta) \end{cases} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right].$$

Per esprimerla nel sistema di coordinate (ω, x, y, z) cerchiamo il cambiamento di coordinate e, con un poco di pazienza, si vede che è il seguente:

$$\begin{cases} x = \frac{x''}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y'' + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x'' + \frac{y''}{2} + \frac{1}{2} \\ z = z'' \end{cases}$$

Effettuando il cambiamento di coordinate la curva in (ω, x, y, z) avrà equazioni:

$$\gamma_3 = \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{36} \cos \theta - \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{2}{9} \sqrt{3} \\ y = -\frac{1}{12} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{12} \sin \theta + \frac{2}{3} \\ z = \frac{\sqrt{6}}{9} (1 + \cos \theta) \end{cases} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$$

Per incollare la curva γ_3 con γ_2 facciamo variare il parametro nell'intervallo $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \right]$ e a tale scopo utilizziamo la traslazione $\theta = t + \pi$ ottenendo così le equazioni ¹⁶:

$$\gamma_3 = \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{36} \cos t + \frac{1}{4} \sin t + \frac{2}{9} \sqrt{3} \\ y = \frac{1}{12} \cos t - \frac{\sqrt{3}}{12} \sin t + \frac{2}{3} \\ z = \frac{\sqrt{6}}{9} (1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \right].$$

Si veda che: $\gamma_3\left(\frac{4\pi}{3}\right) = C\left(\frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ (e quindi si incolla con la curva γ_2),

$$\gamma_3\left(\frac{8\pi}{3}\right) = D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Per trovare l'ultimo tratto di curva γ_4 partiamo dall'arco di circonferenza α_4 nel piano per poi ruotarlo nello spazio. Cerchiamo le equazioni della curva α_4 rispetto al sistema (ω, X, Y, Z) in figura (figura 11).

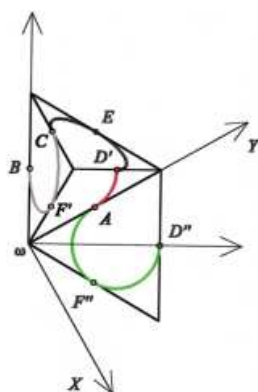


Fig. 11

¹⁶ Si osservi che $\cos(t + \pi) = -\cos t$, $\sin(t + \pi) = -\sin t$.

Poiché il centro è $C_4\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$ e il raggio $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$, le equazione rispetto al suddetto sistema di riferimento sono¹⁷:

$$\alpha_4 = \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 + \cos(-\theta)) \\ Y = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(-\theta)\right) \\ Z = 0 \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$

ovvero

$$\alpha_4 = \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 + \cos \theta) \\ Y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin \theta\right) \\ Z = 0 \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$

Effettuiamo una rotazione ρ rispetto all'asse delle Y in senso antiorario, ovvero attraverso

$$\rho = \begin{cases} X^* = -\frac{1}{3}X - \frac{2\sqrt{2}}{3}Z \\ Y^* = Y \\ Z^* = \frac{2\sqrt{2}}{3}X - \frac{1}{3}Z \end{cases}$$

ne segue che $\gamma_4 = \rho(\alpha_4)$ nel sistema (ω, X, Y, Z) avrà equazioni:

$$\gamma_4 = \begin{cases} X = -\frac{\sqrt{3}}{18}(1 + \cos \theta) \\ Y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin \theta\right) \\ Z = \frac{\sqrt{6}}{9}(1 + \cos \theta) \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right].$$

Per esprimerla nel sistema di coordinate (ω, x, y, z) cerchiamo il cambiamento di coordinate, e vediamo che è il seguente:

¹⁷ $-\theta$ è motivato dall'orientamento orario della curva.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y \\ z = Z \end{cases}$$

Effettuando il cambiamento di coordinate la curva in (ω, x, y, z) avrà equazioni:

$$\gamma_4 = \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{36}\cos\theta - \frac{1}{4}\sin\theta + \frac{2}{9}\sqrt{3} \\ y = \frac{1}{12}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin\theta + \frac{1}{3} \\ z = \frac{\sqrt{6}}{9}(1 + \cos\theta) \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$

Per incollare la curva γ_4 con γ_3 come in figura 12, facciamo variare il parametro nell'intervallo $\left[\frac{8\pi}{3}, 4\pi\right]$.

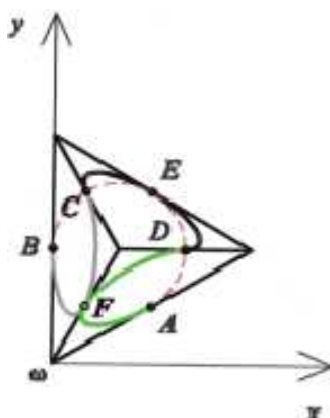


Fig. 12

A tale scopo utilizziamo la traslazione $\theta = t - 3\pi$ ottenendo così le equazioni ¹⁸:

$$\gamma_4 = \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{36}\cos t + \frac{1}{4}\sin t + \frac{2}{9}\sqrt{3} \\ y = -\frac{1}{12}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{12}\sin t + \frac{1}{3} \\ z = \frac{\sqrt{6}}{9}(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \left[\frac{8\pi}{3}, 4\pi\right]$$

¹⁸ Si osservi che $\cos(t - 3\pi) = -\cos t$, $\sin(t - 3\pi) = -\sin t$

Si veda che: $\gamma_4\left(\frac{8\pi}{3}\right) = D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ (e quindi si incolla con la curva γ_3), $\gamma_4(4\pi) = A\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$ (e quindi si incolla con la curva γ_1).

In conclusione la curva $Loop_{2/3}$ ha equazione parametrica:

$$\gamma = \begin{cases} x = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{6}(1 - \cos t) & t \in \left[-\frac{4\pi}{3}, 0\right] \\ \frac{\sqrt{3}}{18}(1 - \cos t) & t \in \left[0, \frac{4\pi}{3}\right] \\ \frac{\sqrt{3}}{36}\cos t + \frac{1}{4}\sin t + \frac{2\sqrt{3}}{9} & t \in \left[\frac{4\pi}{3}, 4\pi\right] \end{cases} \\ y = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin t\right) & t \in \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \\ \frac{1}{12}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin t + \frac{2}{3} & t \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right] \\ -\left(\frac{1}{12}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{12}\sin t\right) + \frac{1}{3} & t \in \left[\frac{8\pi}{3}, 4\pi\right] \end{cases} \\ z = \begin{cases} 0 & t \in \left[-\frac{4\pi}{3}, 0\right] \\ \frac{\sqrt{6}}{9}(1 - \cos t) & t \in [0, 4\pi] \end{cases} \end{cases}$$

Si verifica che la curva è *regolare*¹⁹ e che si può sempre parlare di *curvatura*²⁰ (k); questa, in particolare, è costante e di valore $k = 2\sqrt{3}$ (il reciproco del raggio $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ della circonferenza inscritta nella faccia del tetraedro), mentre, in quanto $LC_{2/3}$ è composta da quattro archi di curve. piane, la *torsione*²¹ (τ) è $\tau = 0$ ovunque tranne che nei punti A, B, C, D di passaggio da una faccia all'altra del tetraedro dove non è definita.

3. Equazione della superficie $LS_{2/3}$

Il centro della curva, ovvero il baricentro del tetraedro, ha coordinate: $O\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$, da cui si ottiene per costruzione la superficie proiettando la curva dal punto, e quindi :

¹⁹ Una curva γ si dice *regolare* se è C^1 e se $|\gamma'| \neq 0 \quad \forall t$.

²⁰ Posta la curva nella forma $\gamma = \gamma(s)$ con s ascissa curvilinea, si dice *curvatura* $k = |\ddot{\gamma}(s)|$; essa è un indice di scostamento dell'andamento della curva da quello di una retta.

²¹ Se t, n sono versori rispettivamente tangente e normale alla curva e $b = t \wedge n$ si dice *torsione* $\tau = \left|\dot{b}(s)\right|$; essa è un indice di scostamento dell'andamento di una curva da quello piano.

$$\sigma = \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6} + v \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{6}(1 - \cos t) & t \in [-\frac{4\pi}{3}, 0] \\ \frac{\sqrt{3}}{18}(1 - \cos t) & t \in [0, \frac{4\pi}{3}] \\ \frac{\sqrt{3}}{36} \cos t + \frac{1}{4} \sin t + \frac{2\sqrt{3}}{9} & t \in [\frac{4\pi}{3}, 4\pi] \end{cases} \\ y = \frac{1}{2} + v \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin t) & t \in [-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \\ \frac{1}{12} \cos t - \frac{\sqrt{3}}{12} \sin t + \frac{2}{3} & t \in [\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}] \\ -(\frac{1}{12} \cos t - \frac{\sqrt{3}}{12} \sin t) + \frac{1}{3} & t \in [\frac{8\pi}{3}, 4\pi] \end{cases} \\ z = \frac{\sqrt{6}}{12} + v \begin{cases} 0 & t \in [-\frac{4\pi}{3}, 0] \\ \frac{\sqrt{6}}{9}(1 - \cos t) & t \in [0, 4\pi] \end{cases} \end{cases} \quad v \in [0, 1]$$

4. Assi e piani di simmetria di $LC_{2/3}$

Vogliamo cercare eventuali assi e piani di simmetria di $LC_{2/3}$. A tale scopo, consideriamo tra le isometrie del gruppo del tetraedro, S_T ,²² quelle che lasciano invariata anche la suddetta curva; esse sono di due tipi: la *simmetria assiale* e la *simmetria ortogonale*. Qui le esamineremo facendo riferimento alla figura 13, dove con 1, 2, 3 e 4 sono indicate le posizioni che i vertici del tetraedro conserveranno nello spazio.

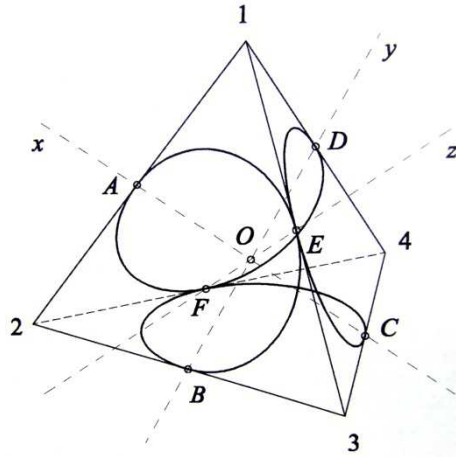


Fig. 13

La *simmetria assiale* (o simmetria di rotazione) ha per asse la retta che congiunge i punti medi di due lati opposti del tetraedro, ad esempio la retta x che congiunge i punti A e C. La simmetria si ottiene in seguito ad una rotazione di 180° attorno a detto asse, la quale, nell'esempio considerato, scambia fra loro i vertici nelle posizioni 1 e 2 e i vertici nelle posizioni 3 e 4.²³ Indicate con y e z le altre due rette che congiungono i punti medi di due lati opposti del tetraedro, otterremo altre due analoghe simmetrie. Gli assi x , y , z del tetraedro sono quindi gli *assi di simmetria* di $LC_{2/3}$.

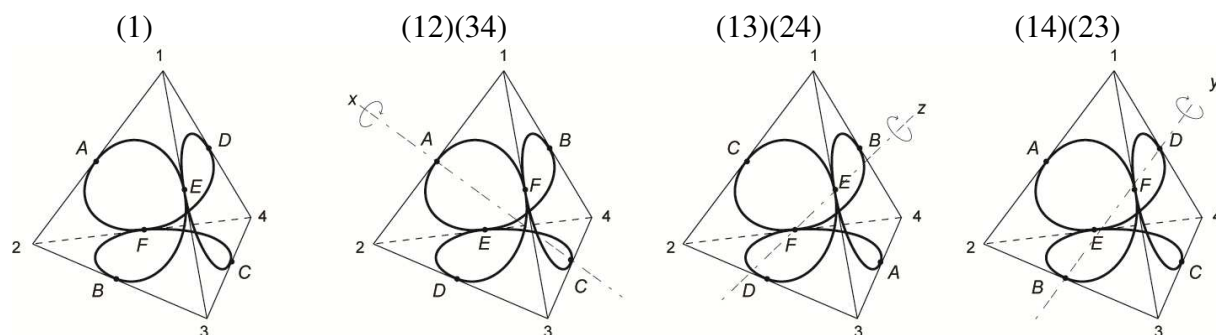
Dette rette, fra loro perpendicolari, individuano tre coppie di punti simmetrici rispetto al centro della curva e si comportano rispetto a questa in due modi diversi: z la interseca nei due punti

²² S_T denota il cosiddetto "gruppo del tetraedro" di ordine 24, comprensivo di tutte le simmetrie che trasformano il tetraedro in se stesso. La struttura grupale di S_T è isomorfa al gruppo S_4 delle sostituzioni sulle lettere A, B, C, D.

²³ Indicheremo questa simmetria con la notazione (12)(34).

multiplici E ed F (infatti, per E passano sia l'arco AB che CD , e per F passano sia l'arco DA che BC), mentre sia x che y la intersecano in due punti, rispettivamente A, C e D, B , contati una sola volta.

Riassumendo, le simmetrie del tetraedro che lasciano invariata la curva $LC_{2/3}$ sono: la rotazione identità e le rotazioni attorno agli assi x, y, z (figure 14 *a, b, c, d*):



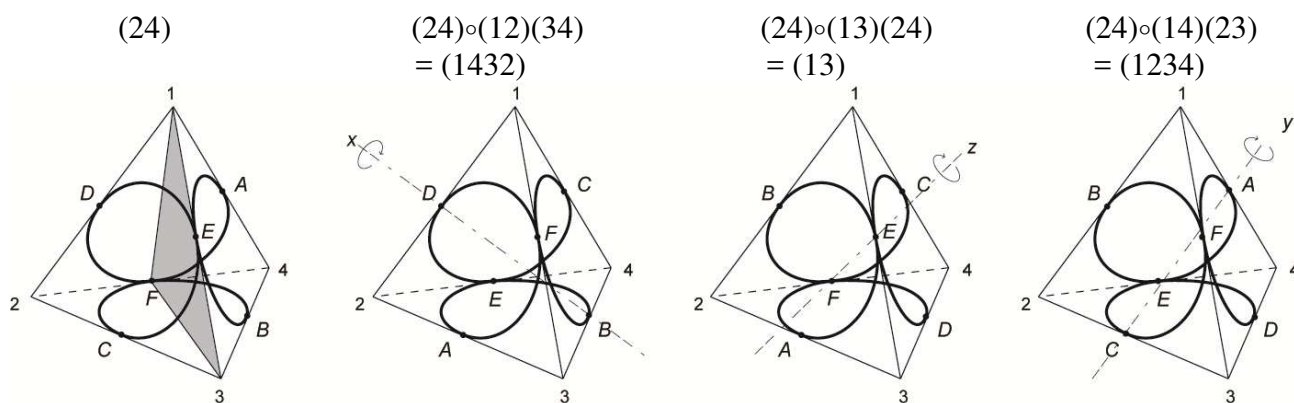
Figg. 14 *a, b, c, d*.

L'insieme delle suddette trasformazioni rappresenta il seguente gruppo:

$$V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

che è del tipo 4-gruppo di Klein.

Vediamo poi che ci sono due simmetrie di tipo ortogonale (o simmetrie di riflessione), una rispetto al piano passante per i due vertici del tetraedro nelle posizioni 1 e 3 e il punto medio del lato opposto,²⁴ l'altra rispetto al piano passante per i due vertici nelle posizioni 2 e 4 e il punto medio del lato opposto;²⁵ detti piani sono quindi i piani di simmetria di $LC_{2/3}$. Componendo una delle due riflessioni, ad esempio (24), con le precedenti rotazioni, si ottengono le seguenti ulteriori simmetrie (figure 15 *a, b, c, d*):



Figg. 15 *a, b, c, d*.

L'insieme di tutte le trasformazioni del tetraedro che lasciano invariata la curva $LC_{2/3}$ forma il seguente gruppo di ordine 8:

$$M = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (24), (1432), (13), (1234)\}$$

²⁴ Scambia fra loro i vertici nelle posizioni 2 e 4 e quindi la indicheremo con la notazione (24).

²⁵ Scambia fra loro i vertici nelle posizioni 1 e 3 e quindi la indicheremo con la notazione (13).

che è isomorfo al gruppo diedrale D_4 (gruppo di congruenze di un quadrato) e, quindi, non abeliano. Riportiamo qui di seguito la tabella di composizione²⁶ del gruppo M

Tabella 2

°	(1)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)	(24)	(1432)	(13)	(1234)
(1)	(1)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)	(24)	(1432)	(13)	(1234)
(12)(34)	(12)(34)	(1)	(14)(23)	(13)(24)	(1432)	(24)	(1234)	(13)
(13)(24)	(13)(24)	(14)(23)	(1)	(12)(34)	(13)	(1234)	(24)	(1432)
(14)(23)	(14)(23)	(13)(24)	(12)(34)	(1)	(1234)	(13)	(1432)	(24)
(24)	(24)	(1234)	(13)	(1432)	(1)	(14)(23)	(13)(24)	(12)(34)
(1432)	(1432)	(13)	(1234)	(24)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)	(1)
(13)	(13)	(1432)	(24)	(1234)	(13)(24)	(12)(34)	(1)	(14)(23)
(1234)	(1234)	(24)	(1432)	(13)	(14)(23)	(1)	(12)(34)	(13)(24)

Si può notare che la tabella non è simmetrica rispetto alla diagonale e, quindi, il gruppo M non è commutativo (ovvero, in generale, $a \circ b \neq b \circ a$). Infatti, ad esempio, $(14)(23) \circ (24) \neq (24) \circ (14)(23)$. Inoltre, si osservi che M ha V come suo sottogruppo commutativo.

Concludiamo questo paragrafo verificando se $LC_{2/3}$ soddisfa la formula $m = 2(L+F+V-2)$. Posto che i concetti di *lati* e *facce* vengano generalizzati rispettivamente in termini di *bordi* denotati con "B", e *piani di orientazione spaziale* denotati con "P", e che quindi $m = 2(B+V+P-2)$, la curva $LC_{2/3}$ (così come anche la superficie conica $LS_{2/3}$) ha $m = 2(1+1+4-2) = 8$.²⁷

5. Un nuovo tipo di isometria: la rotazione pluripolare (in questo caso, quadripolare)²⁸

Si vuole ora proporre una particolare isometria che consente alla curva $LC_{2/3}$ (e così anche a tutte le figure analoghe, descritte e raffigurate nel seguito di questo capitolo e verso la fine del prossimo) di trasformarsi nel suo simmetrico senza ricorrere ad un piano di riflessione. Ciò soddisfa all'esigenza, del tutto personale, di interpretare la geometria 3-D in senso fisico e di considerare quindi le sole trasformazioni ottenibili mediante uno "spostamento" dell'oggetto all'interno dello spazio 3-D.

Vediamo come ciò sia possibile. Prendiamo una $LC_{2/3}$ inscritta per semplicità in un tetraedro (figura 16) e tracciamo quattro semirette, a, b, c, d , con origine nel centro della curva e passanti per il centro delle facce del tetraedro (esse coincidono con il prolungamento delle quattro altezze del tetraedro). Queste semirette, che chiamiamo *assi polari* della curva, formano a due a due un angolo di $141,057^\circ = 2 \arccos(1/3)$. Se $LC_{2/3}$ viene fatta "scorrere" attorno alla sua quaterna di assi polari,

²⁶ E' la tabella comprensiva di tutti i prodotti tra i movimenti del gruppo.

²⁷ Si possono costruire figure analoghe a $LC_{2/3}$, ad esempio una con $m=12$. Detta figura, che chiamiamo $LC_{3/4}$ (e $LS_{3/4}$), è ricavata dall'intersezione di un cubo di lato a e di una sfera con centro nel baricentro del cubo e raggio $r = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$. Alcune di queste figure saranno descritte più avanti.

²⁸ Per seguire in modo più agevole e divertente la descrizione delle rotazioni quadripolari si suggerisce di usare un modello di $LS_{2/3}$ (*superficie di Loop_{2/3}*) costruibile con cartoncino e forbici seguendo le istruzioni in Appendice 3.

tutti i suoi punti si spostano di archi di uguale misura, ma senza mantenere uguali le distanze reciproche nello spazio tridimensionale. Tuttavia, le distanze iniziali tra i punti vengono ripristinate ogni volta che questi hanno percorso un quarto della curva. Si ottengono così quattro diverse simmetrie che chiamiamo *rotazioni quadripolari* di 240° , 480° , 720° , 960° , e che denoteremo rispettivamente con $rq_{1/4}$, $rq_{1/2}$, $rq_{3/4}$, rq_1 (rq_1 è equivalente alla rotazione identità). Per fare un esempio, prendiamo una $LC_{2/3}$ (figura 17 a), dove con 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sono indicate le posizioni che i suoi punti critici conserveranno nello spazio, e vediamo come si ottiene la trasformata (figura 17 b) applicando una $rq_{1/4}$ secondo il verso di scorrimento indicato dalle frecce: il punto A va dalla posizione 1 alla posizione 2, il punto B dalla posizione 2 alla 3, C dalla 3 alla 4, D dalla 4 alla 1, mentre i punti E ed F si scambiano fra loro nelle posizioni 5 e 6.²⁹ Il risultato è uguale alla simmetria di riflessione (1432) descritta precedentemente (figura 15 b).

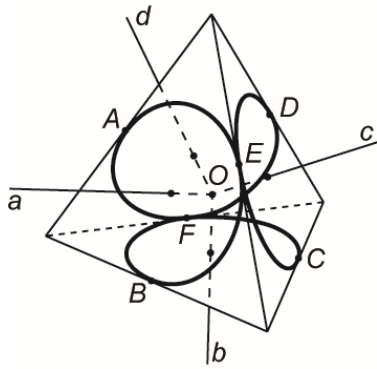


Fig. 16

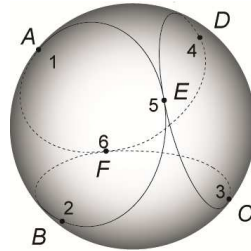


Fig. 17 a

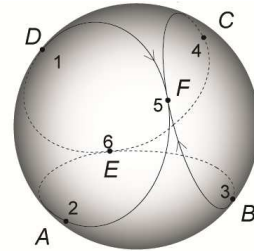
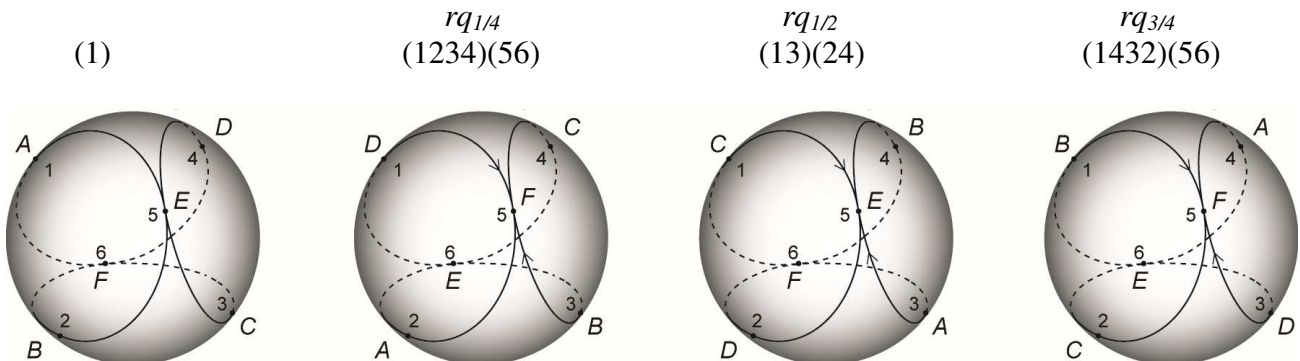


Fig. 17 b

Si può così dimostrare che il gruppo M delle simmetrie di $LC_{2/3}$ è interamente esprimibile attraverso rotazioni, di tipo assiale e di tipo quadripolare.

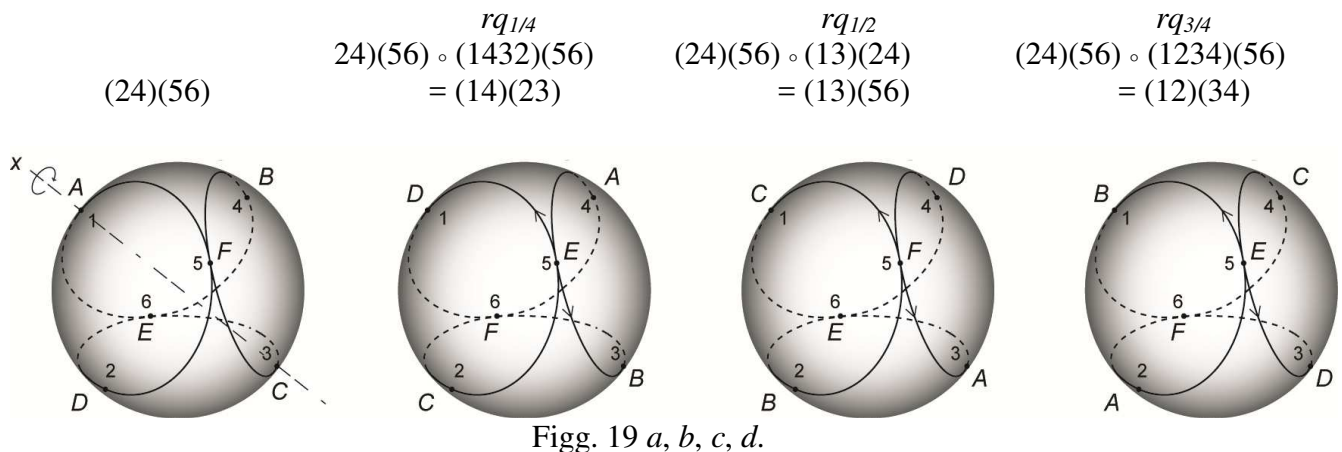
6. Il gruppo M attraverso le rotazioni quadripolari

Applicheremo le rotazioni quadripolari alla curva della figura 17 a, indicando per mezzo di frecce il suo verso di scorrimento. Poiché qui si fa riferimento a sei posizioni, e non più a quattro (quelle che i vertici del tetraedro conservano nello spazio, come si è visto nella precedente sezione 4), la forma con cui ora si indicheranno le trasformazioni di $LC_{2/3}$ sarà la seguente: figure 18 a, b, c, d (si noti che le 18 a, b sono uguali alle 17 a, b) e figure 19 a, b, c, d:



Figg. 18 a, b, c, d.

²⁹ Possiamo anche vedere i sei punti critici della curva come i vertici di un ottaedro e, in questo particolare esempio, osservare che i punti E ed F si sono scambiati di posizione, mentre il quadrato formato dai vertici A, B, C, D ha ruotato di 90° in senso antiorario.



Le figure 18 a, b, c, d rappresentano, nell'ordine, la rotazione identità e le tre rotazioni $rq_{1/4}$, $rq_{1/2}$, $rq_{3/4}$, mentre le figure 19 a, b, c, d rappresentano la rotazione assiale seguita dalle suddette tre rotazioni. Si ottiene così il seguente gruppo L di ordine 8, comprensivo di tutte le trasformazioni che lasciano invariata la curva $LC_{2/3}$:

$$L = \{(1), (56)(1234), (13)(24), (56)(1432), (24)(56), (14)(23), (13)(56), (12)(34)\}.$$

Osserviamo che la rotazione assiale (figura 19 a), qui applicata attorno all'asse x passante per la coppia di punti nelle posizioni 1 e 3, lascia questi fissi e scambia fra loro i punti nelle posizioni 2 e 4 e i punti nelle posizioni 5 e 6; conseguentemente, nelle tre trasformazioni successive risulteranno invertite le freccette indicanti il verso prescelto per lo scorrimento della curva. Inoltre, notiamo che la rotazione $rq_{1/2}$ è equivalente ad una rotazione assiale, mentre le rotazioni $rq_{1/4}$ e $rq_{3/4}$ sono entrambe equivalenti ad una simmetria di riflessione. Infine, gli elementi di L possono essere confrontati con quelli di M, descritti precedentemente, per verificare come a ciascun elemento di un insieme corrisponda un equivalente elemento dell'altro insieme. Si troverà, ad esempio, che $(1234)(56)$ di L è equivalente a (1432) di M. Quindi, riassumendo, $L = M$.

7. Proprietà degli assi di simmetria x, y, z di $LC_{2/3}$

Facendo riferimento alla figura 13, si può dimostrare che gli assi x, y, z sono fra loro perpendicolari. Osserviamo che rispetto alla curva essi si comportano in due modi diversi: l'asse z interseca $LC_{2/3}$ nei due punti E e F , ognuno contato due volte (infatti, per il punto E passano sia l'arco AB che CD , e per il punto F passano sia l'arco DA che BC),³⁰ mentre gli assi x e y intersecano $LC_{2/3}$ ciascuno in due punti (rispettivamente A, C e D, B) contati una sola volta.

I tre assi x, y, z individuano una varietà di sottocurve di $LC_{2/3}$, delle quali studieremo qui di seguito le proprietà e le simmetrie.

8. Sottocurve di $LC_{2/3}$

Facendo ancora riferimento alla figura 13, si può vedere $LC_{2/3}$ come formata dalle due curve chiuse $AECFA$ e $BEDFB$ che s'intersecano lungo l'asse z , e che chiameremo *Curve di loop*_{1/3}, brevemente $LC_{1/3}$ ³¹ (Figure 20 a, b).

³⁰ A, C e D, B sono coppie di punti simmetrici rispetto al centro della curva e sono anche i vertici di un quadrato. Detti punti rappresentano il passaggio della curva da un piano a un altro ed è per questo motivo che sono chiamati *punti critici*.

³¹ Detta curva è costruibile seguendo le stesse procedure osservate nella costruzione di $LC_{2/3}$, con la differenza di utilizzare archi di un terzo di circonferenza anziché di due terzi.

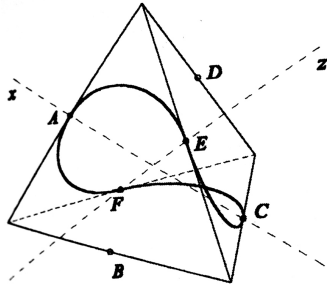


Fig. 20 a

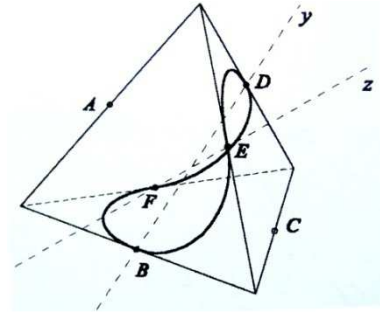
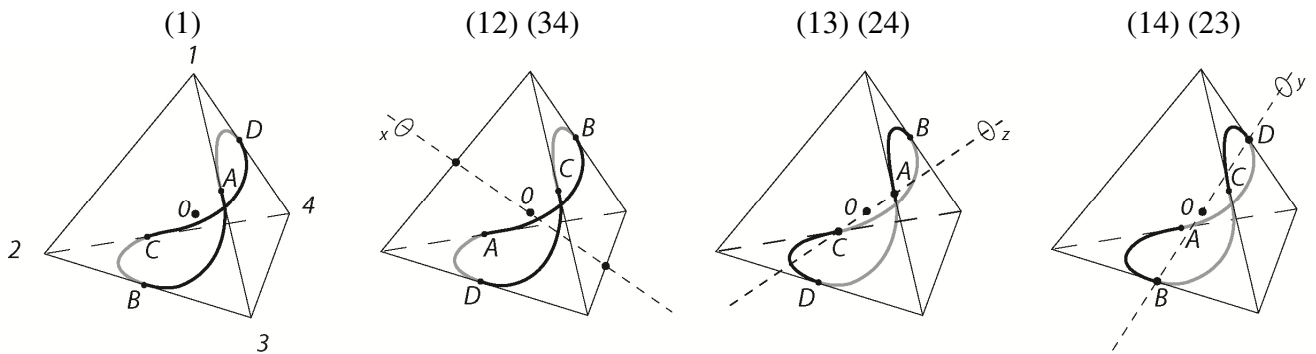


Fig. 20 b

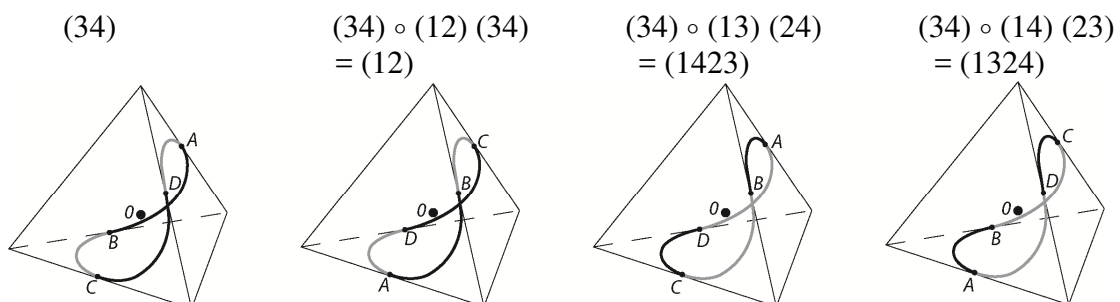
Le due curve così individuate risultano simmetriche e sovrapponibili. $LC_{1/3}$ possiede due assi che passano per il suo centro intersecandola ciascuno in due punti simmetrici rispetto a quest'ultimo. Come si può osservare, questa curva possiede, come $LC_{2/3}$, quattro punti critici (nelle figure sono rispettivamente A, E, C, F e B, E, D, F) ma nessun punto contato due volte.

9. Simmetrie di $LC_{1/3}$

Le simmetrie che mandano $LC_{1/3}$ in sé sono l'identità, le tre rotazioni assiali e le quattro corrispondenti riflessioni (figg. 21 a, b, c, d e 22 a, b, c, d). Esse sono dunque le medesime già studiate per $LC_{2/3}$. Tuttavia, se si confrontano queste figure con le 14 a, b, c, d, e 15 a, b, c, d, si può notare che i primi quattro elementi sono uguali, mentre gli elementi relativi alle quattro riflessioni sono diversi. La ragione di ciò risiede nella scelta iniziale dell'elemento identità e, nel caso specifico della $LC_{1/3}$ qui studiata, le simmetrie di riflessione sono relative a due dei sei piani di simmetria ortogonale del tetraedro in cui è inscritta, che però non sono (e non possono essere) gli stessi delle simmetrie di riflessione della $LC_{2/3}$ della figura 8 in cui è stata individuata. Infatti, i due piani di riflessione della $LC_{1/3}$ sono, in questo caso, uno passante per il lato 12 e il punto medio del lato 34, e l'altro passante per 34 e il punto medio di 12.



Figg. 21 a, b, c, d



Figg. 22 a, b, c, d

In base a quanto è stato sopra osservato, gli elementi delle simmetrie di riflessione di una $LC_{1/3}$ avente, ad esempio, l'elemento identità come da figura 20 *a*, saranno (23), (14), (1324), (1243). Chiaramente, per far sì che $LC_{1/3}$ riproponga gli elementi (24), (13), (1432), (1234) osservati nelle figure 19 *a, b, c, d*, basterà scegliere in modo opportuno l'elemento identità.

La struttura grupmale di $LC_{1/3}$ è, come quella di $LC_{2/3}$, isomorfa al gruppo diedrico D_4 .

10. Generazione di $LV_{2/3}$

Vediamo ora che cosa si ottiene dalla circonferenza con diametro OP (figura 23) nel corso di una *rqI* lungo la curva $LC_{2/3}$.

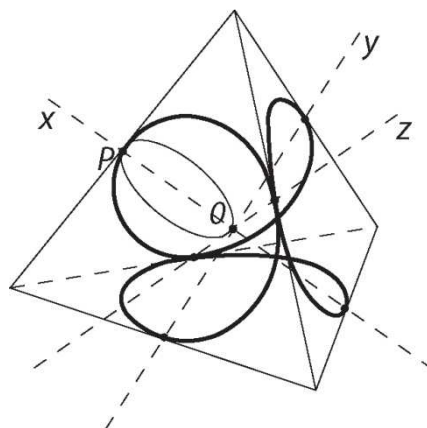


Fig. 23

Spostando detta circonferenza lungo la curva per tutta la sua lunghezza (mantenendo quindi invariate le sue caratteristiche iniziali), si genera una figura toro-sferoidale che chiamiamo *Volume Loop*_{2/3}, brevemente $LV_{2/3}$ (figura 24).

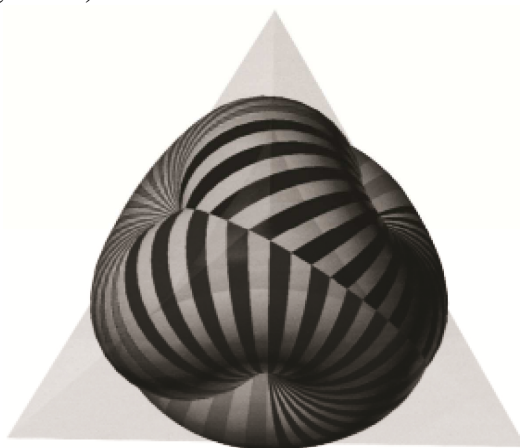


Fig. 24

Come si può notare, $LV_{2/3}$ è una superficie chiusa con auto-intersezione caratterizzata da quattro punti singolari tra loro equidistanti e appartenenti ciascuno ad una ciclode a fuso³². Si hanno quindi quattro ciclidi a fuso, attraverso le quali la superficie di $LV_{2/3}$ è connessa al suo centro. Chiamiamo

³² Detto termine è stato introdotto dai matematici del diciannovesimo secolo nello studio delle superficie. Una ciclode a fuso è caratterizzata da due punti singolari che somigliano al punto singolare di un doppio cono. Si osservi che ciascuna delle quattro ciclidi di questa figura è incompleta in quanto generata da un arco di circonferenza che ruota di 240° attorno a una corda coincidente con uno dei quattro assi polari di $LC_{2/3}$.

i quattro punti singolari "*poli di $LV_{2/3}$* ". La figura 25 mostra lo sviluppo di questa superficie orientata in modo che si possa leggere con chiarezza l'autointersezione e tre delle sue quattro ciclide a fuso. La figura 26 illustra meglio la forma di una ciclode di questo tipo.



Fig. 25

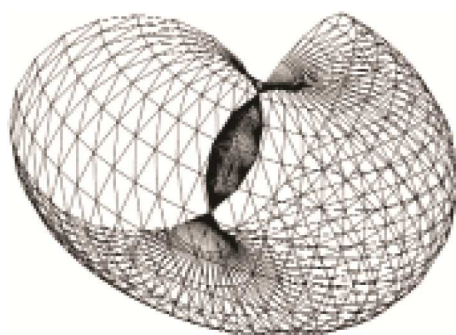


Fig. 26

Vediamo ora come si comporta una circonferenza perpendicolare alla curva $LC_{2/3}$ nel corso di una rqI . A tale scopo sarà conveniente ridefinire i tre assi della curva, x, y, z , in tre coppie di semiassi complementari, $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$, come in figura 27. Partendo dal punto P in x_1 , spostiamo la circonferenza lungo la curva seguendo la direzione della freccia, e prendiamo in considerazione soltanto le otto posizioni (figure 28 *a, b, c, d, e, f, g, h*) che essa assume quando tocca i quattro punti critici di $LC_{2/3}$ e i due punti contati ciascuno due volte (percorrendo la curva lungo tutta la sua lunghezza, la circonferenza passa due volte per ciascuno di questi ultimi punti)³³. Si può così notare che il piano della circonferenza (colorata in grigio chiaro da una parte e in grigio scuro dalla parte opposta) risulta ruotato di 90° ogni volta che questa si è spostata da uno qualsiasi dei sei semiassi a quello complementare come, ad esempio, da y_1 a y_2 . Inoltre, il piano della circonferenza risulta ruotato di 180° ogni volta che questa si è spostata da z_1 a z_1 passando per z_2 , o da z_2 a z_2 passando per z_1 . Queste osservazioni ci porteranno ad introdurre, nella prossima sezione, un nuovo concetto che chiameremo "*Sistema Monoduale*" (SM).

³³ Si osservi che, ad ogni cambio di posizione da un semiasse a quello successivo, la circonferenza effettua una $rqI/8$.

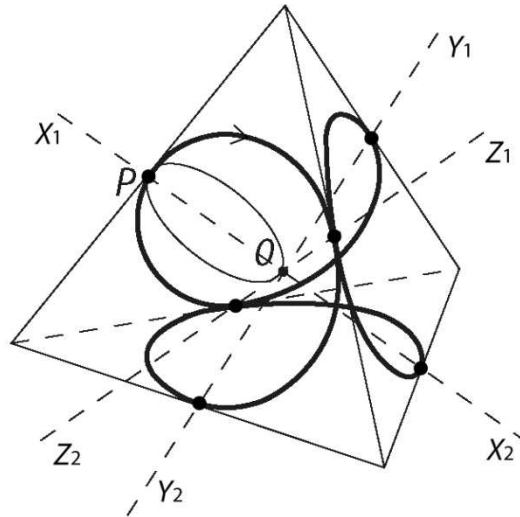
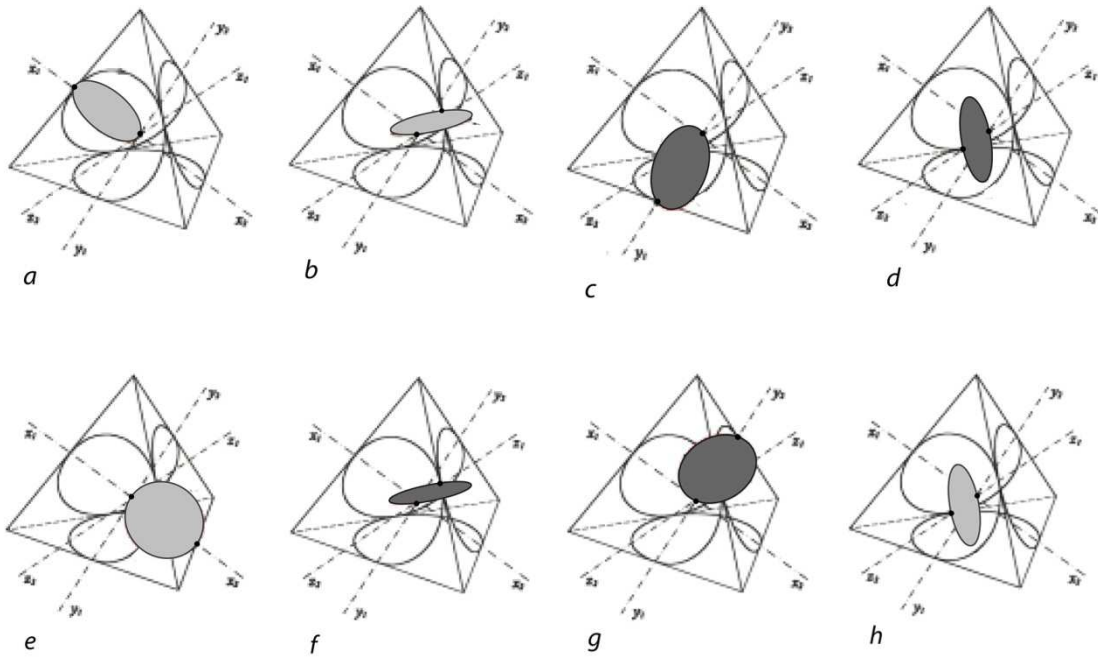


Fig. 27



Figg. 28 a, b, c, d, e, f, g, h

11. Sistema Monoduale (SM)

Prendiamo in considerazione l'idea che le due varietà di Loop, $LS_{2/3}$ e $LV_{2/3}$, siano generate, anziché da un solo elemento (rispettivamente, un raggio e una figura piana normale alla curva, come ad esempio la circonferenza descritta nella sezione precedente), da una coppia di tali elementi fra loro uguali, q e q' , che chiameremo *Sistema Monoduale* se q e q' soddisfano le due seguenti condizioni:

- hanno, in tutte le posizioni che essi assumono l'uno rispetto all'altro, uguali caratteristiche rispetto alla curva LC ;

b) mantengono invariata la loro reciproca distanza misurata lungo la curva LC .³⁴

Un sistema monoduale avrà la notazione $SM.1$ o $SM.2$, a seconda che gli elementi che lo costituiscono siano a una o a due dimensioni. Qui descriveremo un particolare esempio di $SM.2$, la cui coppia di elementi è data da due circonferenze (per una più chiara visualizzazione, ricorriamo ad una coppia di cerchi).

Prendiamo una $LC_{2/3}$ di raggio r , suddividiamola in un numero n di parti uguali fra loro³⁵ usando i sei semiassi come riferimento iniziale. Costruiamo due circonferenze uguali di diametro OP e OP' (O centro della curva e P, P' rispettivamente punti di intersezione della curva con x_1, x_2) appartenenti ciascuno al piano normale alla curva (figura 29). Per comodità è rappresentata in grigio scuro l'area della circonferenza in x_1 e in grigio chiaro quella della circonferenza in x_2 (come è già stato osservato, i piani delle due circonferenze sono fra loro perpendicolari quando si trovano spaiate in x_1, x_2 e in y_1, y_2). Il nostro $SM.2$ è così pronto per entrare in funzione. Assegnato un verso di percorrenza alla curva, lungo questa faremo compiere a SM , a tratti, un giro completo mantenendo invariate le caratteristiche iniziali delle sue due circonferenze rispetto ad essa.

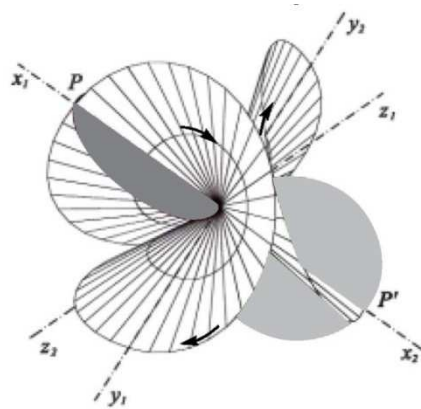


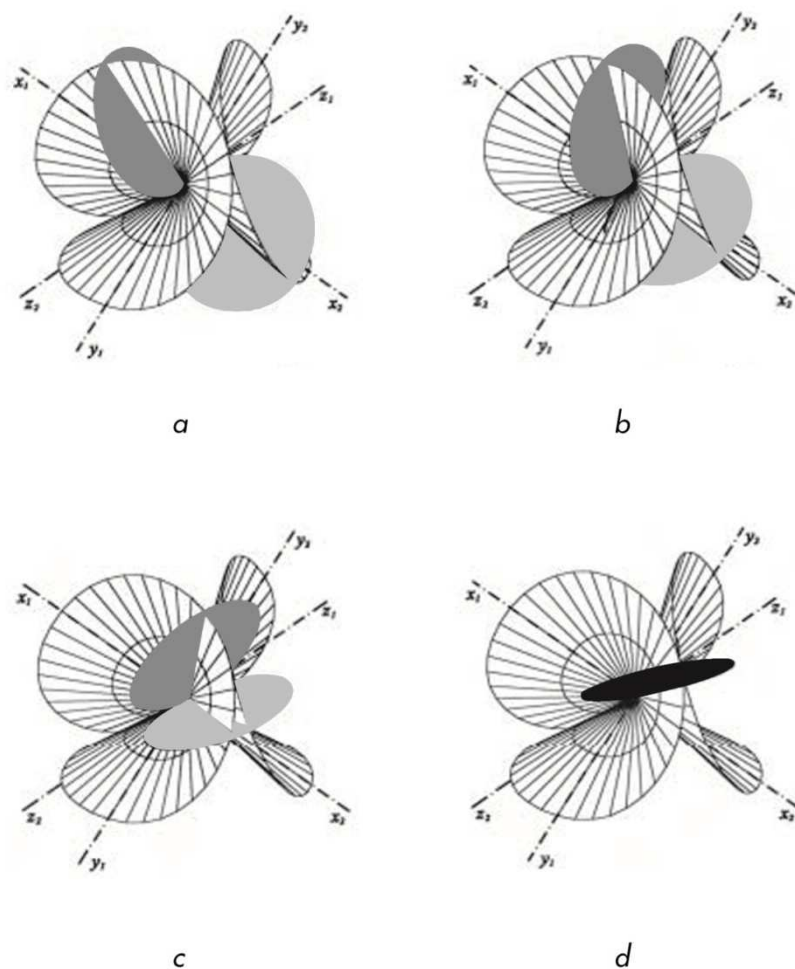
Fig. 29

Si osservi che, se spostiamo SM in avanti³⁶ di tre spicchi, le due circonferenze vengono a trovarsi fra loro "più vicine", e i loro diametri vengono a formare in O un angolo α minore di 180° (fig. 30a). Spostando SM di altri tre spicchi, detto angolo si riduce ulteriormente (Fig. 30b). Dopo altri due passaggi di questo tipo si ha una sovrapposizione delle due circonferenze in z_1 , la quale è rappresentata da un cerchio nero in figura 30d. Ciascuna circonferenza di SM ha così compiuto una $r q_{1/8}$. Si può verificare che, qualunque sia la posizione di SM , le sue due circonferenze mantengono invariata la loro reciproca distanza lungo la curva e, paradossalmente, anche in z_1 .

³⁴ E' la lunghezza della curva $LC_{2/3}$ tra i punti in cui le due circonferenze la intersecano.

³⁵ Poiché i sei semiassi suddividono la curva in otto parti uguali, per quanto segue converrà suddividere questa in un numero di parti multiplo di otto. Come si può vedere in figura 29 e nelle 4 figure successive, ognuna di queste otto parti è stata divisa in 12 spicchi, per un totale di 96 spicchi.

³⁶ Entrambe le circonferenze si spostano in verso orario. Si osservi che queste si sposterebbero in verso orario anche se percorressero la curva nel verso opposto a quello indicato dalle frecce. Infatti, risulta evidente che, muovendo lungo il loop da x a y , il verso è in ogni caso orario mentre, muovendo da y a x , il verso è antiorario.



Figg. 30 *a, b, c, d*

Seguitando ad operare nel modo suddetto, le due circonferenze si “allontaneranno” l'una dall'altra finché i loro diametri non coincideranno rispettivamente con y_1 e y_2 . Successivamente, esse si “riavvicineranno” fino a sovrapporsi (cerchio nero) in z_2 . Di qui si “allontaneranno” di nuovo fino a quando la circonferenza (con l'area) in grigio scuro non coinciderà con x_2 e quella in grigio chiaro con x_1 . Ciascuno dei due elementi di *SM* avrà così portato a termine una $rq_{1/2}$.

La caratteristica fondamentale di un *SM.2* consiste nel fatto di non possedere alcuna simmetria e, in un certo senso, di trovarsi in una condizione di instabilità, anche se, come sviluppo di una rotazione completa (rq_1), esso dà luogo ad una forma che noi idealizziamo come un oggetto ben definito e caratterizzato da otto simmetrie, ovverosia il toro sferoidale quadripolare illustrato nelle precedenti figure 24 e 25.

Nel corso di una rotazione completa (rq_1) di un *SM*, rappresentata cinematicamente in figura 31 con una serie di 32 fotogrammi, si ha una successione di quattro azioni scandite da un inizio e una fine (analoghe, per così dire, ad una successione di quattro battiti di mani).

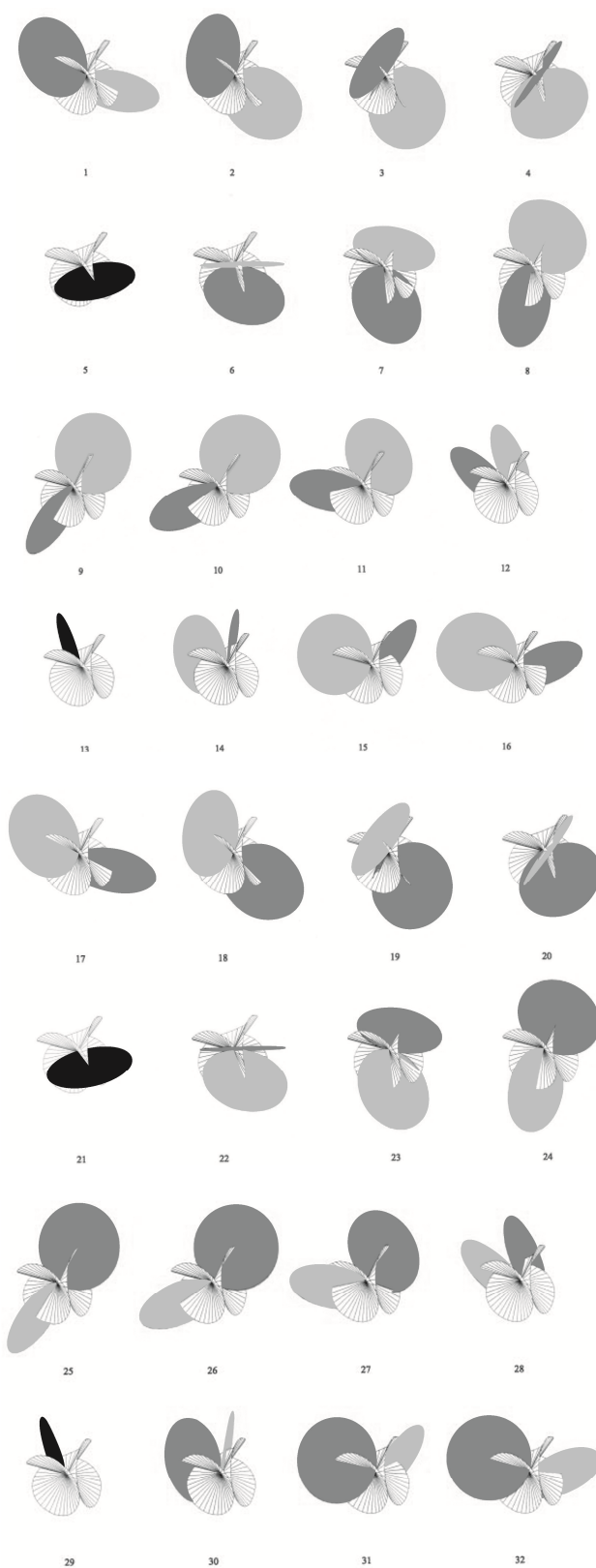
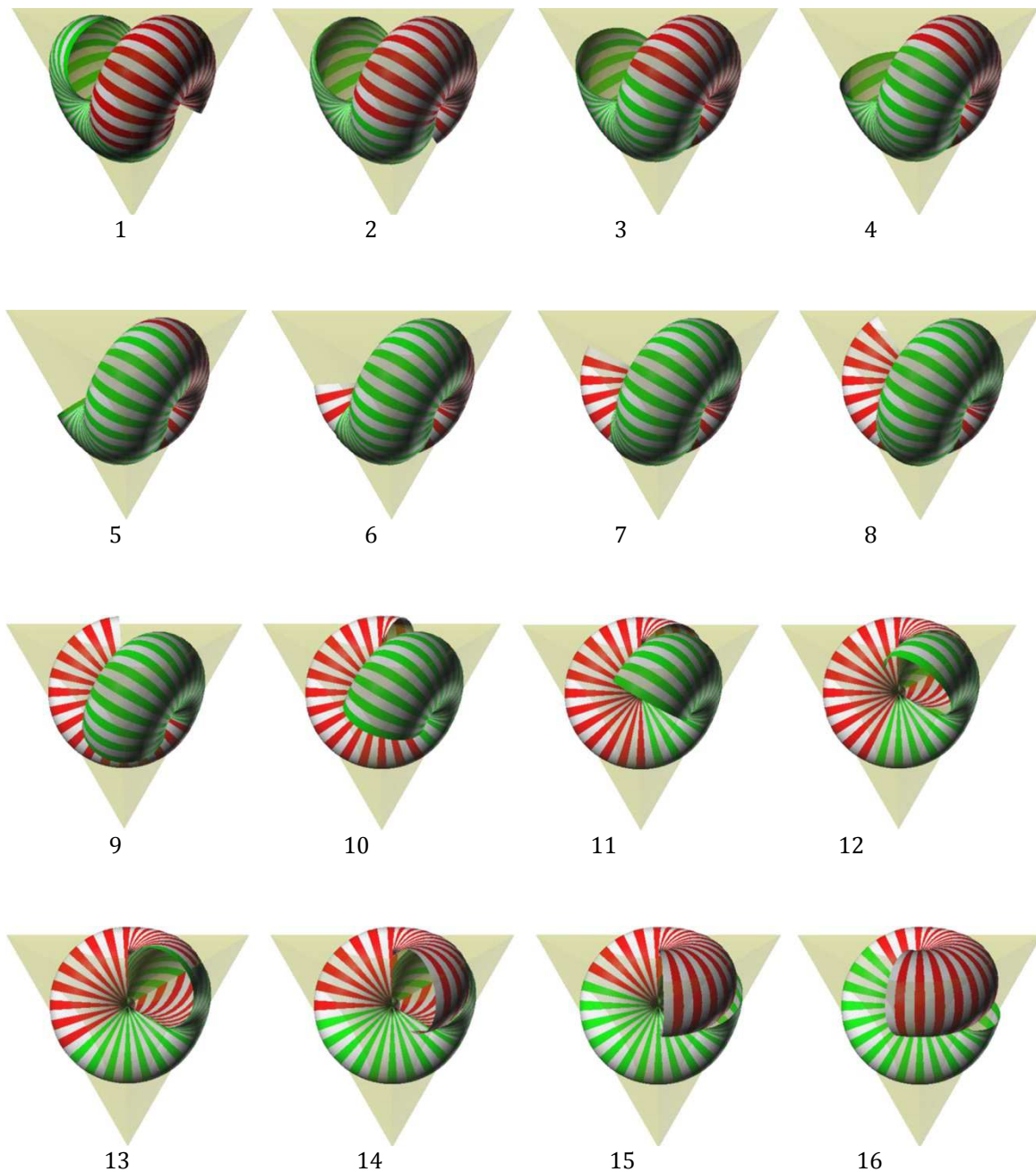


Fig. 31 (sequenza cinematica da 1 a 32 di un $SM.2$)

Da questo $SM.2$ si può ottenere l'emiloop $ELV_{2/3}$ del tetraedro (figura 28).

12. Emiloop $ELV_{2/3}$

Passiamo ora a considerare, anziché la cinematica di un $SM.2$ ($LV_{2/3}$), quella di un emi-loop $ELV_{2/3}$. Questa figura è caratterizzata da due estremità circolari che svolgono la stessa funzione di un SM , ma con la differenza che in questo caso tali estremità sono fra loro connesse lungo la curva per metà della sua lunghezza, costituendo così i confini di una sorta di tunnel spaziale. Questo tunnel varia con continuità la propria configurazione nel corso di ogni periodo di rotazione. Per poter visualizzare un emiloop ($ELV_{2/3}$) in azione, e per dare risalto alla peculiarità del suo modo di ruotare (si tratta di un moto angolare intrinseco caratteristico di un processo autoreferenziale), è stata da me realizzata un'animazione computerizzata. Da questa è stata poi selezionata una successione di 32 fotogrammi (fig. 28, con numerazione da 1 a 32), nella quale apparirà comprensibile come si svolga l'azione autoreferenziale dell'emiloop (in questo caso, con il rosso in progressione e il verde a seguire).



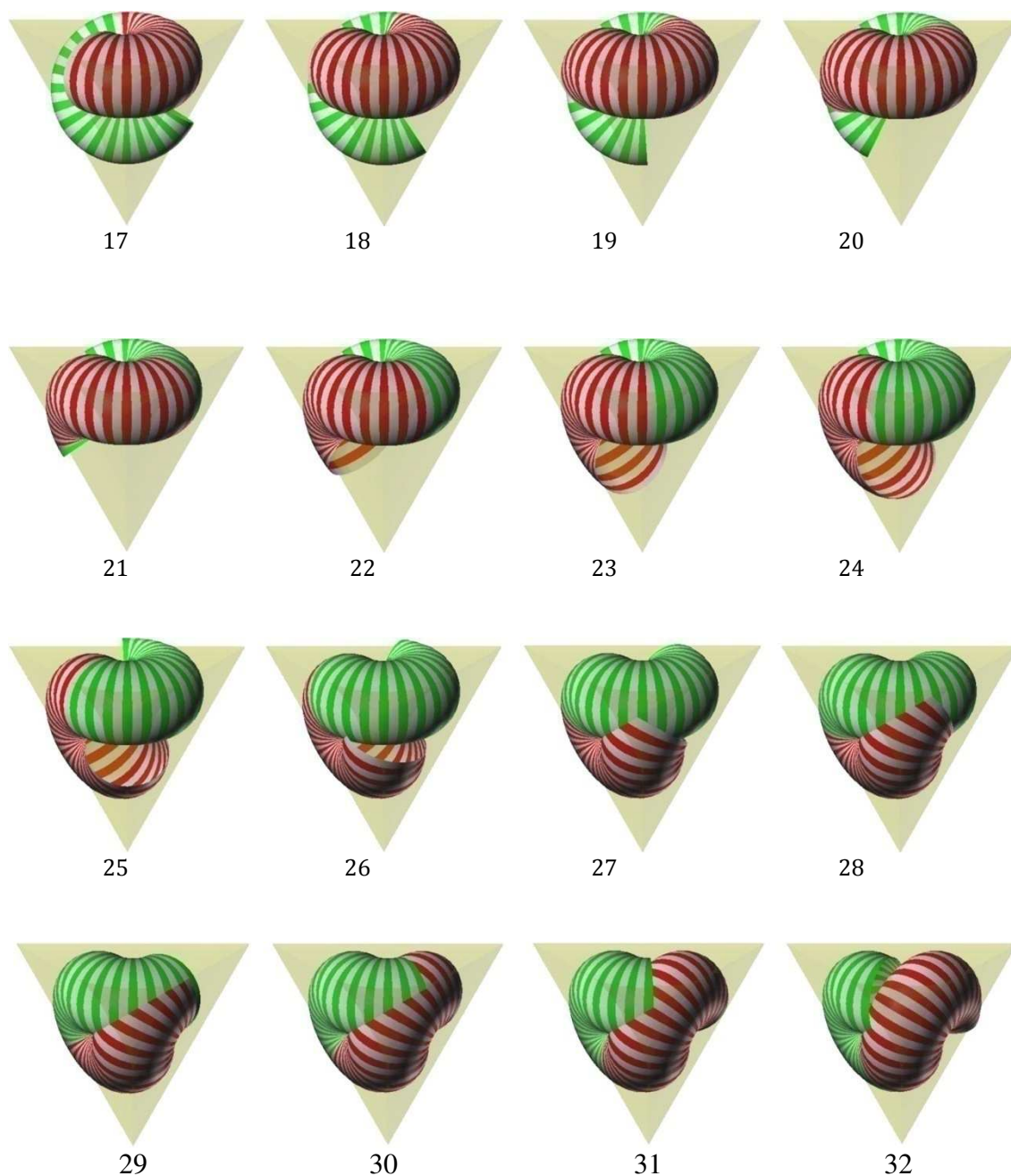


Fig. 32 (un $ELV_{2/3}$ in una sequenza cinematografica comprensiva di 32 fotogrammi)

Il processo di auto-interazione in questa sequenza (o un processo piuttosto simile) potrebbe suggerire l'idea di *esperienza fenomenica* a livello elementare.

13. Alcune varianti delle forme semplici

E' possibile creare nuove forme geometriche derivabili da quelle semplici, attraverso l'introduzione di variabili aggiuntive. Qui mi limiterò a mostrarne solo tre. Partendo dalla figura 29, dove un $SM.2$ è posizionato in x_1, x_2 di una curva $LC_{2/3}$, si faccia in modo che ciascuna delle due circonferenze compia, nel corso di ogni rotazione quadripolare $rq_{1/4}$, anche una rotazione (o

torsione) di 180° attorno all'asse passante perpendicolarmente per il suo centro, e si faccia anche in modo che il verso destrorso o sinistrorso di quest'ultimo tipo di rotazione concordi con il verso orario o antiorario della corrispondente $rq_{1/4}$. Così operando, e posto che la variazione dell'angolo di rotazione di ciascuna circonferenza attorno al rispettivo asse sia proporzionale alla variazione dell'angolo che SM forma con i suoi diametri al centro del loop, tutte le curve della superficie di $LV_{2/3}$ generate dalla combinazione dei due suddetti moti risulteranno fra loro di uguale lunghezza. La figura 33 mostra due immagini fra loro speculari, ciascuna delle quali rappresenta $1/4$ di $LV_{2/3}$, il primo quarto, destrorso, generato da una circonferenza nel corso della sua $rq_{1/4}$ da x_1 a y_1 (uguale a quello che va da x_2 a y_2), il secondo quarto, antiorario generato dall'altra circonferenza nel corso della sua $rq_{1/4}$ da y_1 a x_2 (uguale a quello che va da y_2 a x_1).

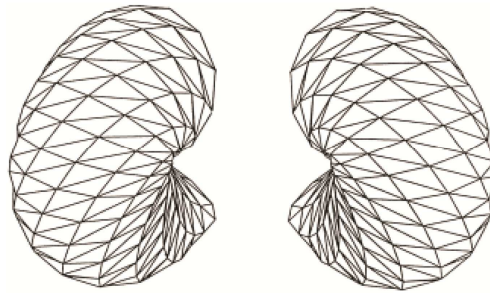


Fig. 33

Con altre due immagini di forme semplici, chiamate " $LS_{2/3}$ farfalla" la prima e " $LV_{2/3}$ conchiglia" la seconda, si concluderà questa breve variazione sul tema (che potrebbe essere però estesa ad altre famiglie di loops). La $LS_{2/3}$ farfalla è costruibile partendo da un $SM.1$ posizionato, ad esempio, in x_1, x_2 di una curva $LC_{2/3}$ di raggio unitario, e facendogli compiere una rotazione quadripolare in modo tale che la lunghezza dei suoi due raggi vettoriali vari proporzionalmente al variare dell'angolo che questi formano al centro O di LC ³⁷. La figura 34 mostra una *spirale farfalla* attraverso i passaggi di un $SM.1$ nel corso di una rotazione $rq_{1/2}$ combinata con una tale variazione.

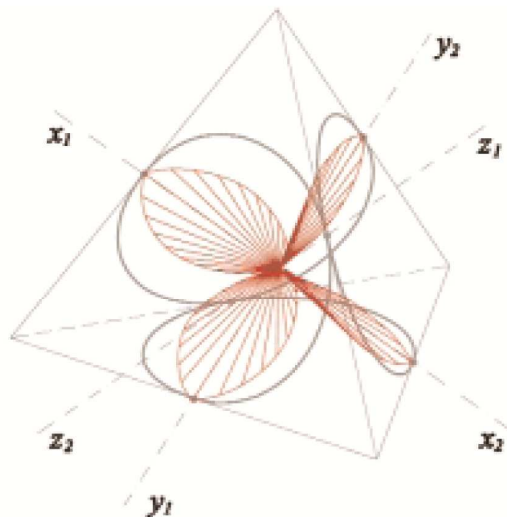


Fig. 34

³⁷ Tale variazione procede da 1 a 0 quando SM si sposta da x o da y verso z , e da 0 a 1 quando SM si sposta da z verso x o y (ciascuno di questi spostamenti corrisponde ad una $rq_{1/8}$).

La figura 35 mostra una $LC_{2/3}$ *conchiglia* attraverso una serie discreta di passaggi che un $SM.2$ compie da x_1, x_2 verso z_1 , e cioè nel corso di una rotazione $rq_{1/8}$ oraria.

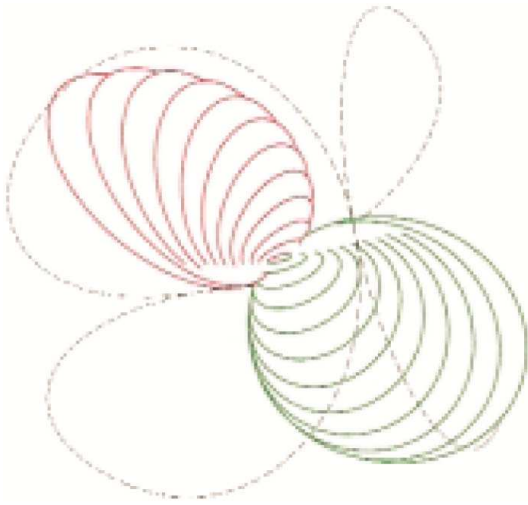


Fig. 35

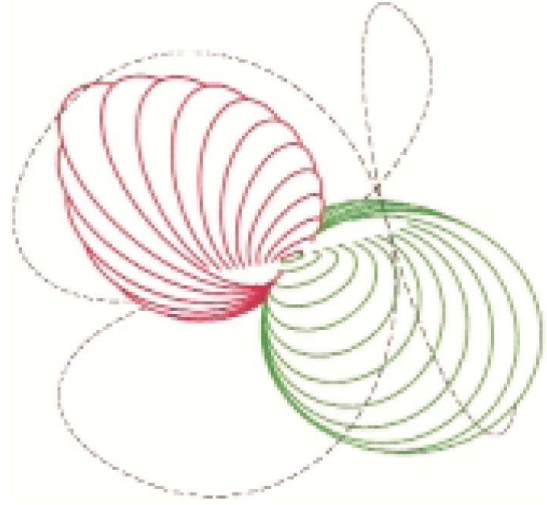


Fig. 36

Si osservi che l'ampiezza degli elementi accoppiati del sistema (in questo caso, circonferenze) varia da 1 a 0, riducendosi ad un punto doppio in corrispondenza del centro di $LC_{2/3}$ (o, viceversa, varia da 0 a 1, emergendo dal centro della curva e spostandosi verso x_1, x_2 nel corso di una $rq_{1/8}$ antioraria). La figura 36 mostra una *conchiglia a bivalve* attraverso gli stessi passaggi che $SM.2$ della figura 29 compirebbe emergendo dal centro della curva e spostandosi, nel corso di una rotazione $rq_{1/8}$ oraria più una $rq_{1/8}$ antioraria, da z_1 a z_2 (o viceversa) attraverso x_1 .

FORME COMPOSTE

1. Costruzione di Strutture Armoniche

Il presente capitolo consiste essenzialmente in un gioco di bricolage. Il suo scopo è di suggerire un'idea della legge auto organizzativa che si presume sia operante nel mondo fisico.

Le forme composte, delle quali descriverò alcuni esempi, saranno chiamate “Strutture Armoniche” e denotate con **SA_n**, dove **n** rappresenta il numero degli elementi che le costituiscono. Gli elementi saranno generalmente chiamati “loops” quando non meglio specificati in relazione alla *famiglia* di appartenenza (del Tetraedro, dell’Esadro, etc.), all’*ordine* (delle Curve, delle Superfici o dei Solidi) e, infine, alla *grandezza* (indicata dalla frazione a pedice). Se ad esempio si scrive “**LC_{2/3}** del Tetraedro”, ci si riferirà ad un loop della famiglia del Tetraedro, dell’ordine delle Curve e di grandezza $\frac{2}{3}$, e cioè formata da 4 archi di $\frac{2}{3}$ di circonferenza (4 archi di circonferenza, ciascuno di 240°). Gli archi sono leggibili sulle facce del Tetraedro e per comodità li chiameremo “**FASI**” , in breve “**F**”.

Il procedimento per la costruzione delle **SA** è piuttosto semplice. Esso richiede che per i loops siano specificate quattro regole, due simboli e due modalità di accoppiamento, come da seguente elenco.

Regole:

1. Ogni loop simula un flusso sferico rotante (dello spazio 3-D) che si svolge in un numero m pari di fasi con $m \geq 4$, queste ultime con verso di percorrenza (orario, antiorario) alternato.
2. Tutti i loops hanno uguale velocità di rotazione pluripolare, che si svolge cioè attorno ad un numero n di assi con $n \geq 3$.
3. Tutti i loops hanno raggio r_1 (v. cap. IX figura 9.48) di uguale lunghezza.
4. Tutti i loops appartenenti alla stessa famiglia, ordine e grandezza sono *uguali* fra loro, e mentre alcuni di essi sono anche sovrapponibili, come ad esempio 2 (o più) loops **LC_{1/3}** o **LS_{1/3}** del Tetraedro o dell'ottaedro, altri non lo sono, non sono cioè compenetrabili; come si vedrà in seguito, esistono loops uguali fra loro che non possono occupare lo stesso stato;³⁸ ad esempio,
5. Ogni loop è deformabile in qualche misura in ragione del particolare genere di interazione che può avere con il suo intorno, perdendo così il grado di simmetria che lo caratterizza quando si trova a riposo.³⁹

Simboli:

- (a) **Fo**: denota ciascuna *fase* del loop il cui verso di rotazione è *orario*.
- (b) **Fa**: denota ciascuna *fase* del loop il cui verso di rotazione è *antiorario*.⁴⁰

Regole di accoppiamento:

- (i) **Modalità semplice**: si applica facendo in modo che la fase **Fo** (o **Fa**) di un loop coincida del tutto o in parte con la fase **Fa** (o **Fo**) di un altro loop in un piano comune.

³⁸ I loops qui concepiti si comportano in accordo con i due seguenti principi fisici che sembrano significare la medesima cosa: 1) il *principio di esclusione di Pauli* (formulato da Walfang Pauli negli anni venti), in base al quale due particelle della famiglia dei fermioni, come ad esempio gli elettroni, non possono trovarsi nello stesso stato quantico, non possono cioè essere schiacciati l'uno dentro l'altro; 2) sono in accordo con il noto *Principio dell'identità degli indiscernibili* di Leibniz, in base al quale due particelle che abbiano le stesse relazioni con tutto ciò che si trova al loro intorno non possono che essere la stessa particella, proprio come ogni monade nella concezione cosmologica di Leibniz (*Monadologia*) ha una visione unica di tutto il suo intorno. Analogamente, esistono dunque tante visioni diverse del mondo quanti sono i loops che lo costituiscono.

³⁹ Da un punto di vista fisico, la deformazione di uno o più loops all'interno di una data struttura armonica è uno dei fattori indicativi del grado di stabilità della struttura stessa.

⁴⁰ Nel caso di loops rappresentati con la sequenza dei quattro colori, Verde, Rosso, Grigio, Nero, saranno usate le notazioni Vo, Ro, Go, No corrispondenti, nell'ordine, alla fase oraria, e Va, Ra, Ga, Na corrispondenti alla fase antioraria.

- (ii) **Modalità estesa:** si applica partendo dalla modalità semplice ed eseguendo una rotazione sinistrorsa o destrorsa su uno dei due loops, attorno all'asse passante per i loro rispettivi centri, di un opportuno angolo (che sarà di 120° , 90° , o 72° , a seconda della famiglia cui essi appartengono).

Dalle premesse 2 e 3 segue che due loops della stessa *famiglia* e di diversa *grandezza*, ad esempio un $LC_{2/3}$ e un $LC_{1/3}$ del Tetraedro avranno, l'uno rispetto all'altro, periodo di rotazione, T , definito dal rapporto delle loro rispettive *grandezze*. Nell'esempio fatto si avrà che il periodo $T(LC_{2/3})$ rispetto al periodo $T(LC_{1/3})$ è $2/3 : 1/3 = 2$. In altre parole, il tempo che $LC_{2/3}$ impiega per compiere una rotazione quadripolare completa (rq_1) è il doppio di quello impiegato da $LC_{1/3}$.

I simboli **Fo** e **Fa** indicano il senso di rotazione delle fasi di un loop.⁴¹

Per semplificare il procedimento di assemblaggio delle **SA** si utilizzeranno, come elementi (o moduli) di base, dapprima i due loops $LC_{1/3}$ e/o gli $LC_{2/3}$ appartenenti alla *famiglia* del Tetraedro⁴², poi due dei loops della famiglia dell'Esaedro, e cioè gli $LC_{1/4}$, $LC_{1/2}$, $LC_{3/4}$ e, da ultimo, gli $LC_{1/3}$ dell'Ottaedro (più propriamente i 4-Loop $LC_{1/3}$ dell'Ottaedro illustrati più avanti nelle figure 64 *a, b, c, d*) combinati con gli $LC_{1/3}$ e/o gli $LC_{2/3}$ del Tetraedro per la tassellazione dello spazio 3-D.

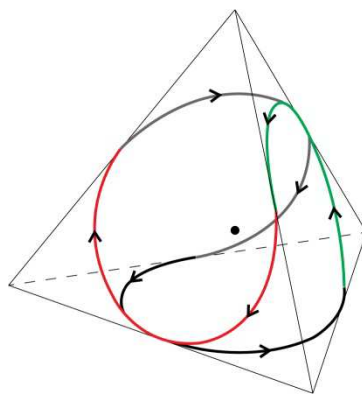


Fig. 33

Avendo a che fare con loops dello spazio tridimensionale, anche un lettore con spiccate capacità di visualizzazione, per quanti sforzi possa fare nel leggere adeguatamente le figure, incontrerebbe difficoltà crescenti al crescere del numero dei loops che compongono le strutture armoniche che seguiranno. Pertanto, allo scopo di poter cogliere le loro effettive relazioni armoniche in modo inequivocabile e, forse, anche un tantino giocoso, sarebbe di grande aiuto procurarsi una serie di almeno cinque tetraedri (di alcuni cubi e ottaedri) della stessa grandezza e, disegnare su ognuno di essi il loop con l'aggiunta di segni particolari (ad esempio, le freccette come illustrato in figura 33, o le scritte **Fo** e **Fa**, o anche, più semplicemente, il segno “+” al posto di **Fa** e il segno “-” al posto di **Fo**) in modo che sia chiaramente distinguibile il verso di percorrenza in ciascuna delle sue quattro fasi. Seguendo questo suggerimento, si potranno assemblare materialmente le **SA** e si avrà un riscontro immediato della correttezza delle regole applicate. In ogni caso, per facilitare la lettura dei loops, le figure saranno illustrate a colori e, in questo primo paragrafo e nel secondo, si converrà che il loro verso di percorrenza proceda circolarmente dal verde (orario) al rosso (antiorario) al grigio (orario) al nero (antiorario).

⁴¹ Il verso orario o antiorario viene qui stabilito assumendo il centro O come punto di ossevezione della curva: ciò implica, ad esempio che la fase del loop sulla faccia ABC del tetraedro nella figura 34 è oraria e, quindi, sarà denotata con “**Fo**”.

⁴² Volendo, si potrebbero utilizzare altrettanto bene gli $LC_{1/3}$ o una combinazione di $LC_{2/3}$ e di $LC_{1/3}$ o, ancora, gli LS o gli LV della stessa famiglia, ma ciò non sarà qui preso in considerazione, in quanto potrebbe ingenerare confusione nella visualizzazione delle **SA** composte da più di due elementi.

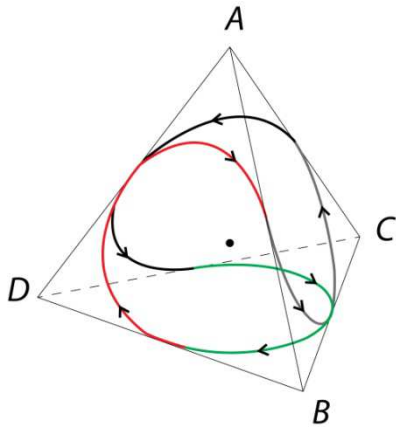


Fig. 34

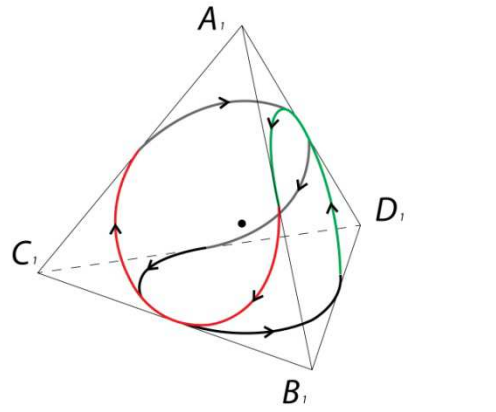


Fig. 35

Seguendo le regole di composizione, si potrà comprendere come ogni **SA** simuli efficacemente il comportamento di un meccanismo armonioso: ogni singolo loop ruoterà concordemente con tutti i loops ad esso accoppiati. In parole diverse, ogni loop della struttura composta ruoterà in perfetto *accordo di fase* con gli altri loops al suo intorno, condividendo con questi uno, due, tre, o tutti i quattro suoi **piani**.

Una breve precisazione prima di iniziare: la notazione **FaFo** (o **FoFa**)⁴³ indica due fasi consecutive di un singolo Loop, mentre la notazione **Fa-Fo** (o **Fo-Fa**) indica l'operazione di accoppiamento di fase fra due Loops (non sono possibili accoppiamenti **Fo-Fo** o **Fa-Fa**). Ad esempio, con riferimento alla figura 34, le due fasi consecutive che vanno dal piano di *ABD* (fase in color rosso) al piano di *ABC* (fase in color grigio) saranno indicate con la notazione **FaFo** (o **Ra-Go**) mentre la fase in grigio **Fo** (o **Go**) del loop di sinistra viene a coincidere con la fase in rosso **Fa** (o **Ra**) del loop di destra (la sovrapposizione di grigio e rosso è indicata in figura con il colore violetto), per cui si indicherà questo accordo armonico delle due fasi con la notazione **Fo-Fa** oppure **Fa-Fo** (a seconda che sia letto dal centro del loop di sinistra o dal centro del loop di destra).

2. SA.2: Strutture Armoniche ottenute da due loops $LC_{2/3}$ della famiglia del Tetraedro⁴⁴

Le figure 34 e 35, che rappresentano due loops $LC_{2/3}$ ciascuno inscritto (per comodità di visione prospettica) in un tetraedro, ci aiuteranno a capire tre modi diversi in cui si può configurare una **SA.2**. Come prima cosa, si osservi che il loop a sinistra presenta sulla faccia *ABC* la fase con verso di percorrenza orario e, dunque, **Fo**, mentre il loop a destra, che è identico al primo ma che è stato opportunamente posizionato per rappresentarne l'immagine speculare, ha sulla faccia *A₁B₁C₁* la fase con il verso antiorario, dunque, **Fa**.

L'assemblaggio di **SA.2** è chiaramente il più semplice, e si ottiene congiungendo i vertici *A, B, C* del primo tetraedro con i corrispondenti vertici *A₁, B₁, C₁* del secondo. La figura 11.3 *a* mostra solo due fasi della struttura con i rispettivi versi di percorrenza (**Fa** a sinistra e **Fo** a destra); ciò servirà da esercizio per dedurre, in seguito, gli accordi di fase occultati all'interno di **SA** più complesse.⁴⁵ Le figure 11.3 *b* e *c* mostrano la struttura integrale dei due loops accoppiati secondo la regola (i), illustrata sia con l'aiuto dei tetraedri che senza.

⁴³ Qui il verso di percorrenza, orario o antiorario, viene stabilito assumendo come punto di osservazione il centro della curva.

⁴⁴ Le coppie armoniche di loops $LC_{1/3}$ della famiglia del tetraedro saranno descritte nella sezione 5 in combinazione con i loops dell'ottaedro.

⁴⁵ Faremo la stessa cosa più avanti, quando descriveremo le **SA** con $n \geq 5$ poiché, senza un tale accorgimento, tali strutture avrebbero una presentazione troppo complicata..

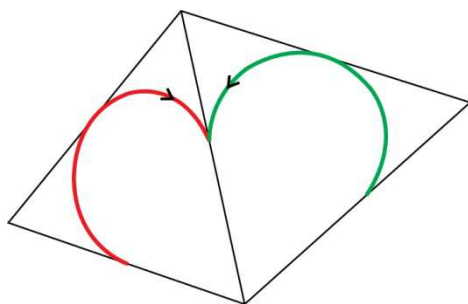


Fig. 36 a

Questa **SA.2** segue la regola di accoppiamento (i). Essa presenta un accordo di fase **Fo-Fa** con modalità semplice, e cioè **Fo** del loop di sinistra coincide con **Fa** del loop di destra (figura 11.3 b).

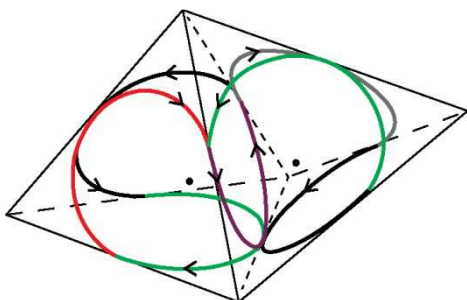


Fig. 36 b

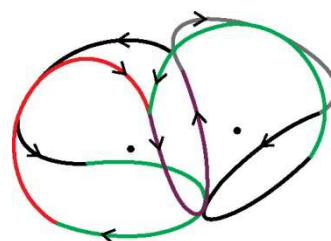


Fig. 36 c

Si noti che l'arco di circonferenza colorato in viola risulta dalla sovrapposizione di **Fo** di color grigio del loop di sinistra con la **Fa** di color rosso del loop di destra.

Ecco un secondo esempio facendo ancora riferimento alla figura 11.3 a. Eseguendo una rotazione sinistrorsa di 120° del tetraedro posizionato sulla destra, seguendo cioè la regola (ii), si ottiene la **SA.2** come in figura 11.4 a.

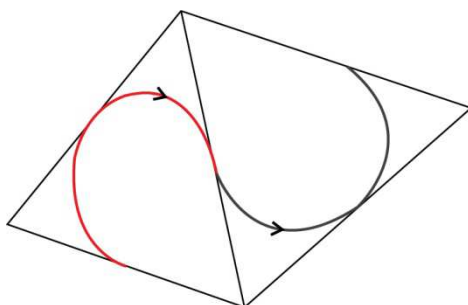


Fig. 37 a

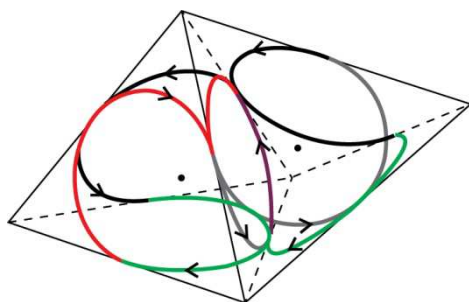


Fig. 37 *b*

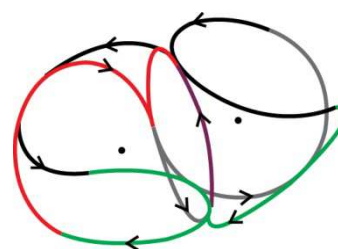


Fig. 37 *c*

Un ultimo esempio: partendo sempre dalla composizione illustrata in figura 11.3 *a*, se si ruota in senso destrorso di 120° il tetraedro di sinistra e poi anche quello di destra, si ottiene la disposizione mostrata nelle figure 11.5 *a*, *b*, *c*.

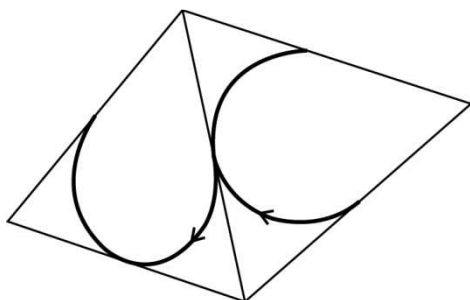


Fig.38 *a*

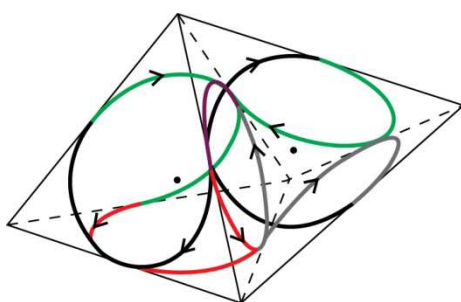


Fig. 38 *b*

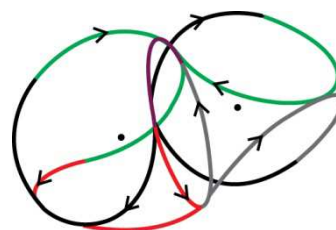


Fig. 38 *c*

Questa struttura segue la regola di accoppiamento (ii), e presenta pertanto un accordo di fase **Fo-Fa** con modalità estesa

SA.5 a stella

Questa struttura è data da cinque tetraedri disposti in modo tale che uno di essi abbia ciascuna faccia coincidente con una faccia di ognuno degli altri quattro. La **SA.5** a stella ha dunque un elemento centrale circondato da quattro elementi aventi ciascuno tre facce libere, ed è la forma

composta più semplice tra quelle caratterizzate da almeno un elemento interno. Le figure 39 *a* e *b* ne sono un esempio.

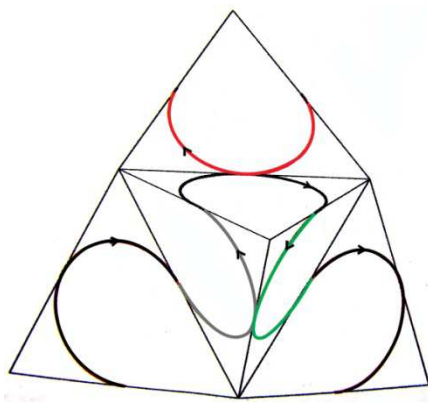


Fig. 39 *a*

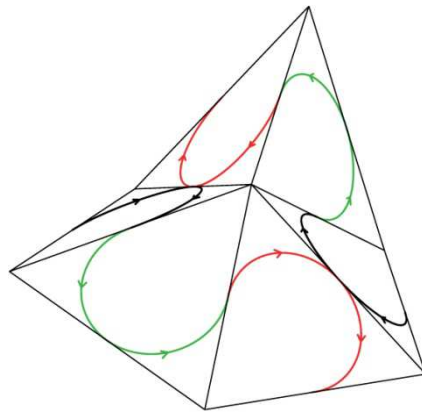


Fig. 39 *b*

Prima tassellazione dello spazio 3-D

17. *Strutture Armoniche con loops $LC_{1/4}$ (della famiglia dell'Esaedro)*

Analogamente alla costruzione della *Curva di Loop_{2/3}* effettuata nella sezione 2, consideriamo un esaedro regolare di lato unitario e una sfera con centro *O* nel baricentro dell'esaedro e con raggio $r = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$ pari alla distanza di *O* dal punto medio del lato, dalla loro intersezione possiamo ricavare la *Curva di Loop_{1/4}* (figura 44).

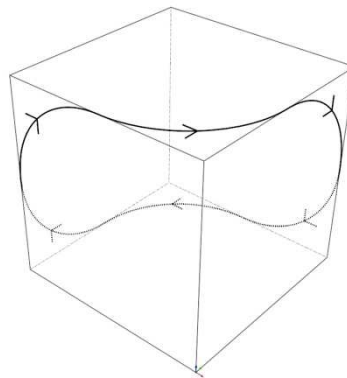


Fig. 44

18. *Strutture Armoniche con loops $LC_{1/4}$ (della famiglia dell'Esaedro)*

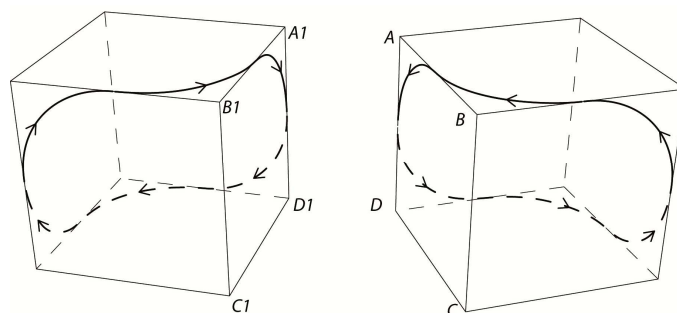


Fig. 45

SA.2

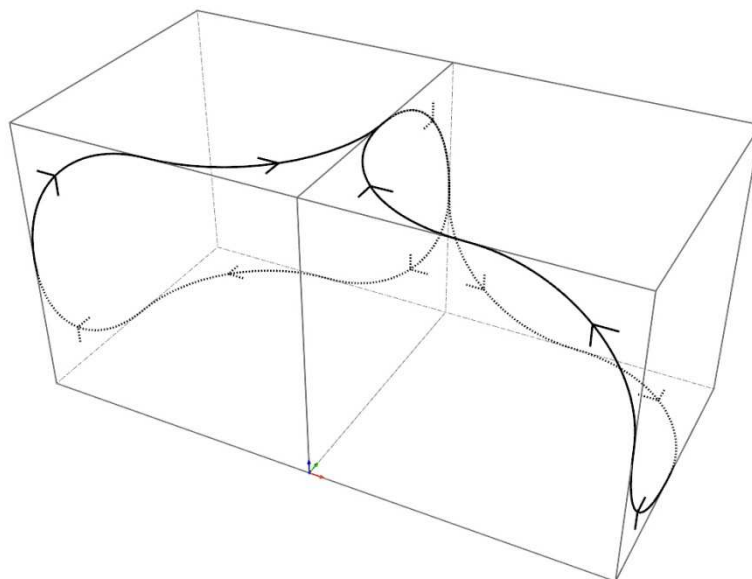


Fig. 46
(2 loops $LC_{1/4}$ accoppiati armonicamente)

SA.4

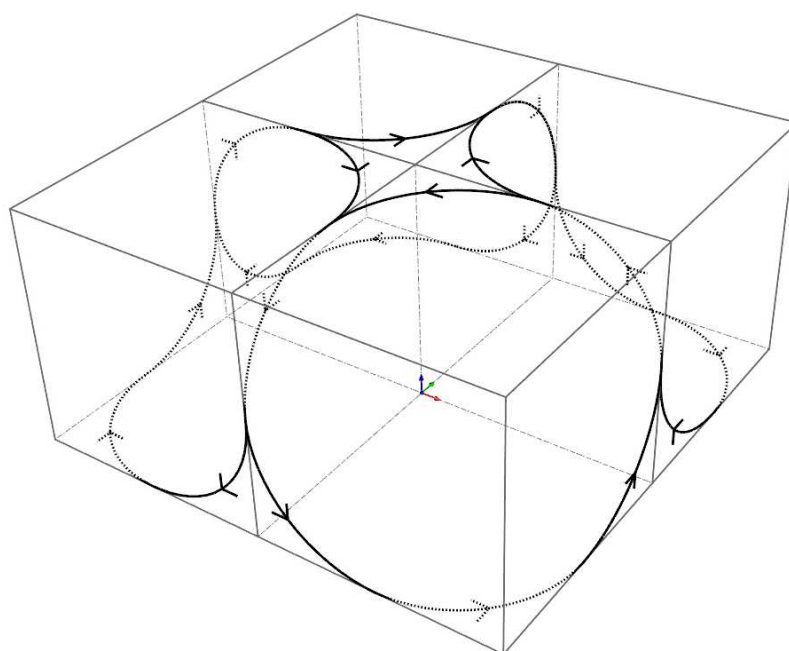


Fig. 47
(4 loops $LC_{1/4}$)

SA.8

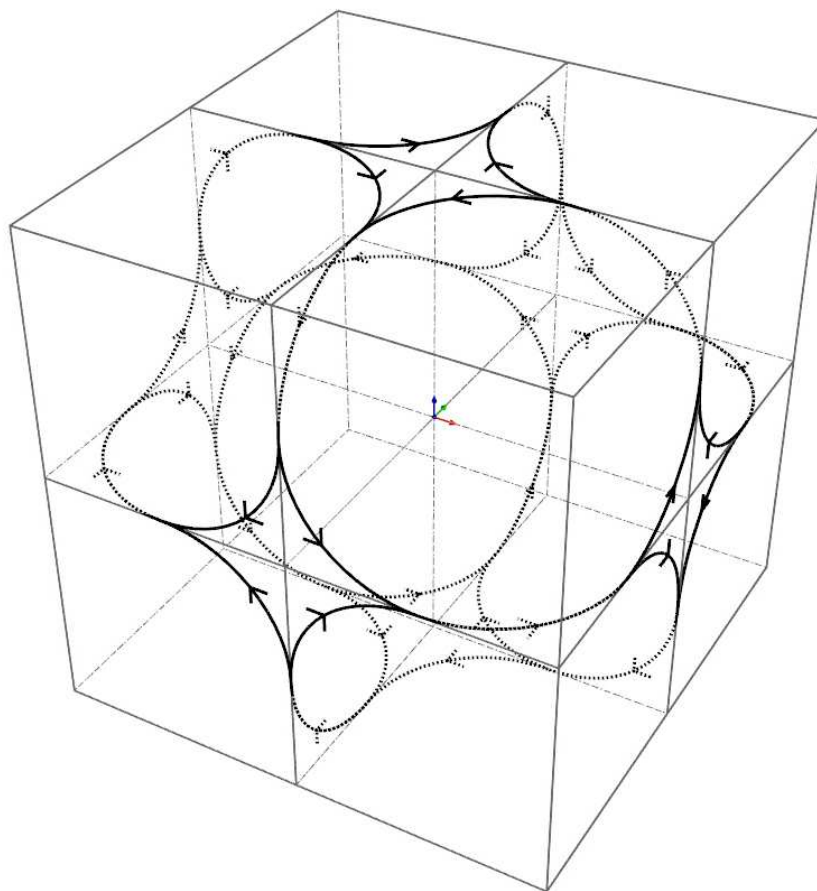


Fig. 48
(8 loops $LC_{1/4}$ assemblati armonicamente)

SA.72

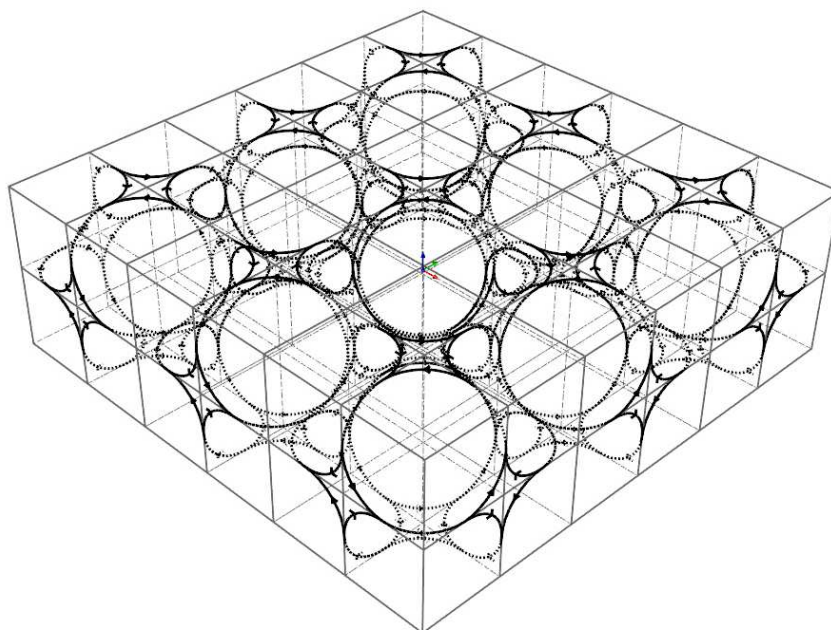


Fig. 49
(assemblaggio armonico di 72 loops $LC_{1/4}$)

SA 648 (18x18x2)

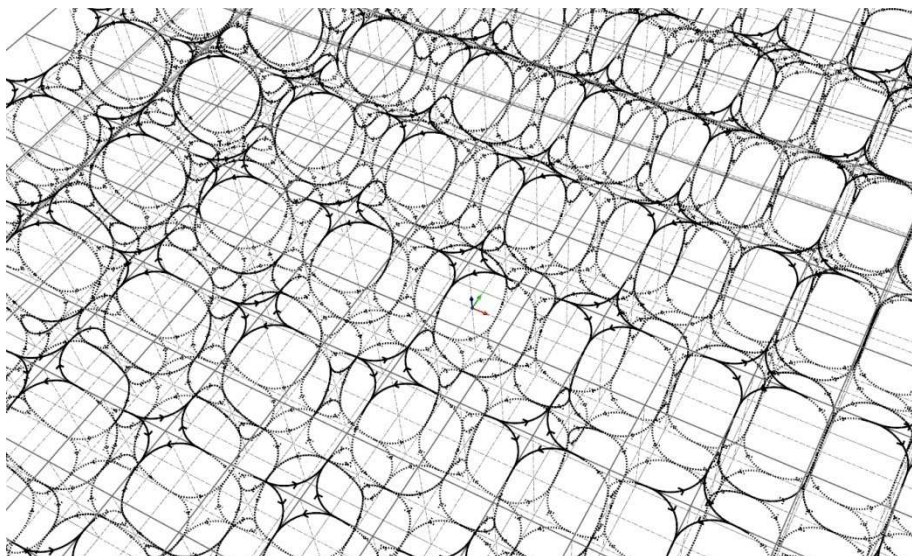


Fig. 50

(particolare di assemblaggio armonico di 648 loops $LC_{1/4}$)

SA. 288 (12x12x2)

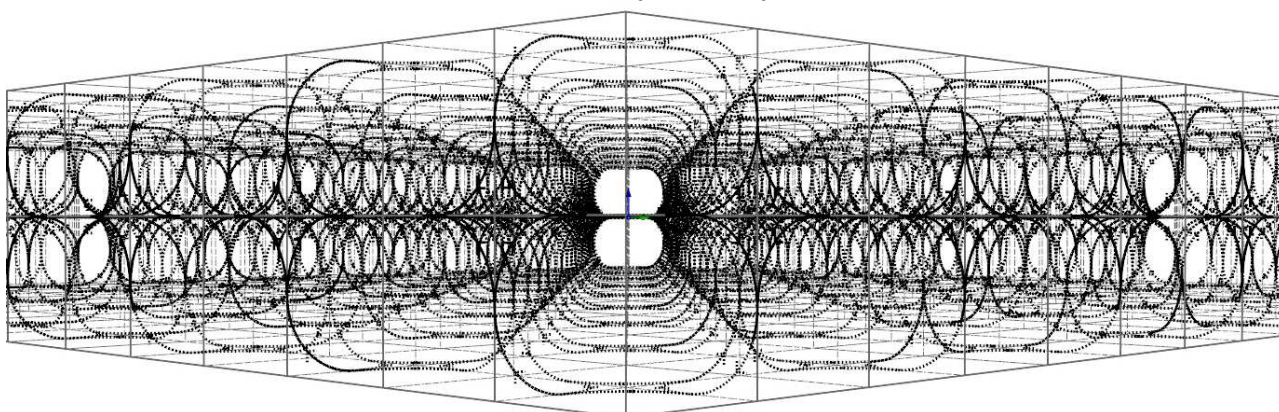


Fig. 51

(vista prospettica parziale di un assemblaggio armonico di 288 loops $LC_{1/4}$)

19. Strutture Armoniche con loops $LC_{3/4}$ (della famiglia dell'Esaedro).

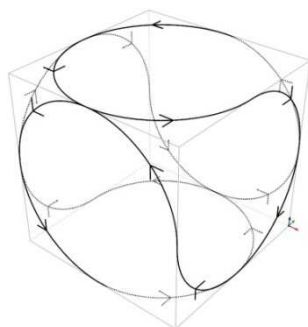


Fig. 52

SA.2

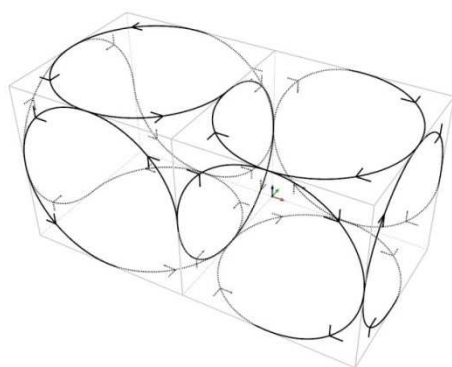


Fig. 53
(2 loops $LC_{3/4}$ accoppiati armonicamente)

SA.4

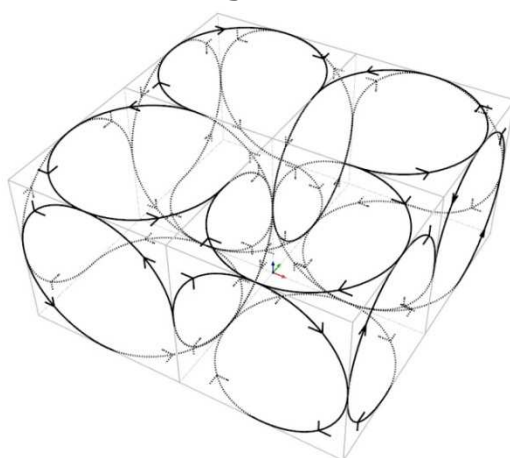


Fig. 54
(4 loops $LC_{3/4}$ assemblati armonicamente)

SA.8

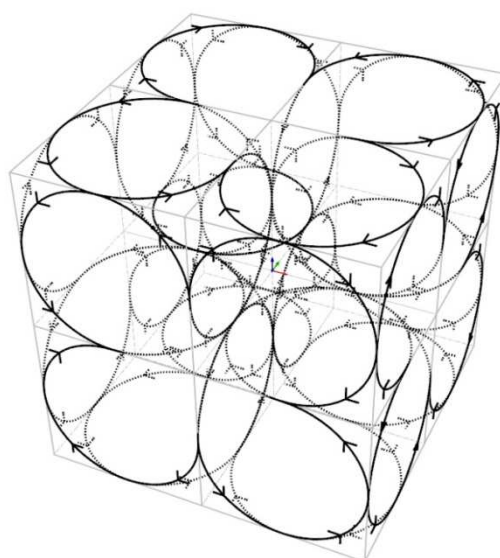


Fig. 55
(8 loops $LC_{3/4}$ assemblati armonicamente)

SA.72

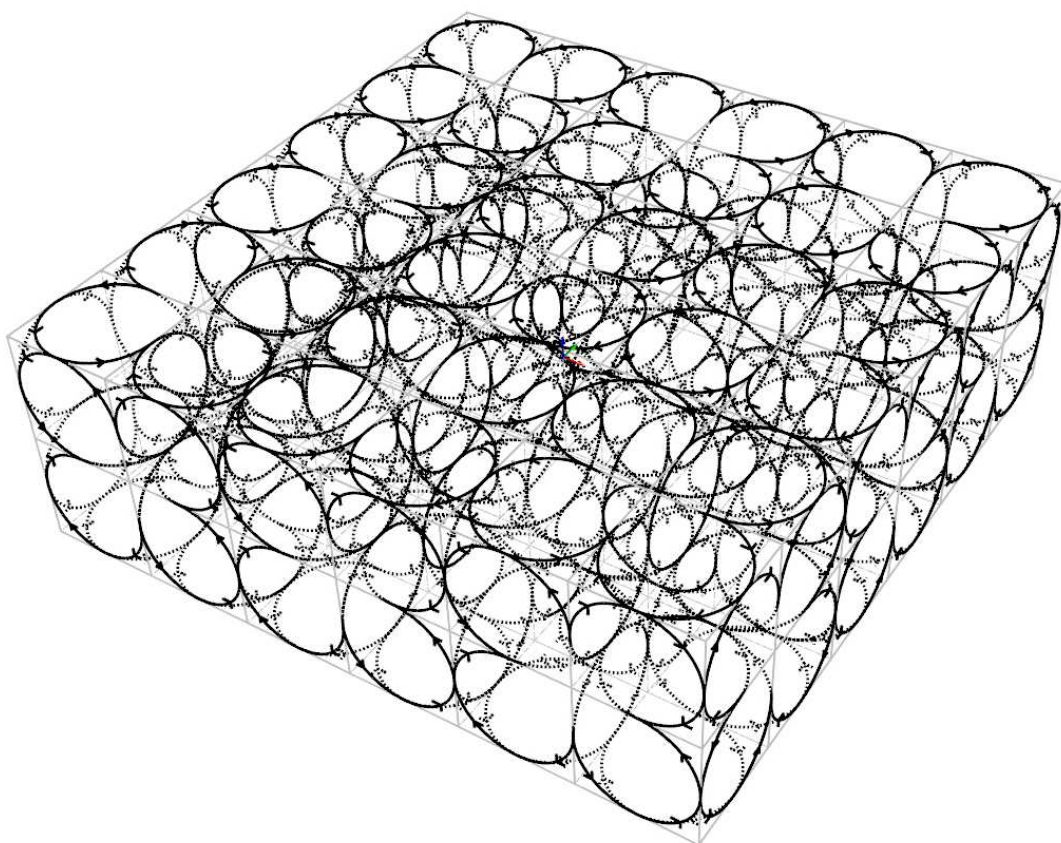


Fig. 56
(72 loops $LC_{\frac{3}{4}}$ assemblati armonicamente)

SA.288 *a*

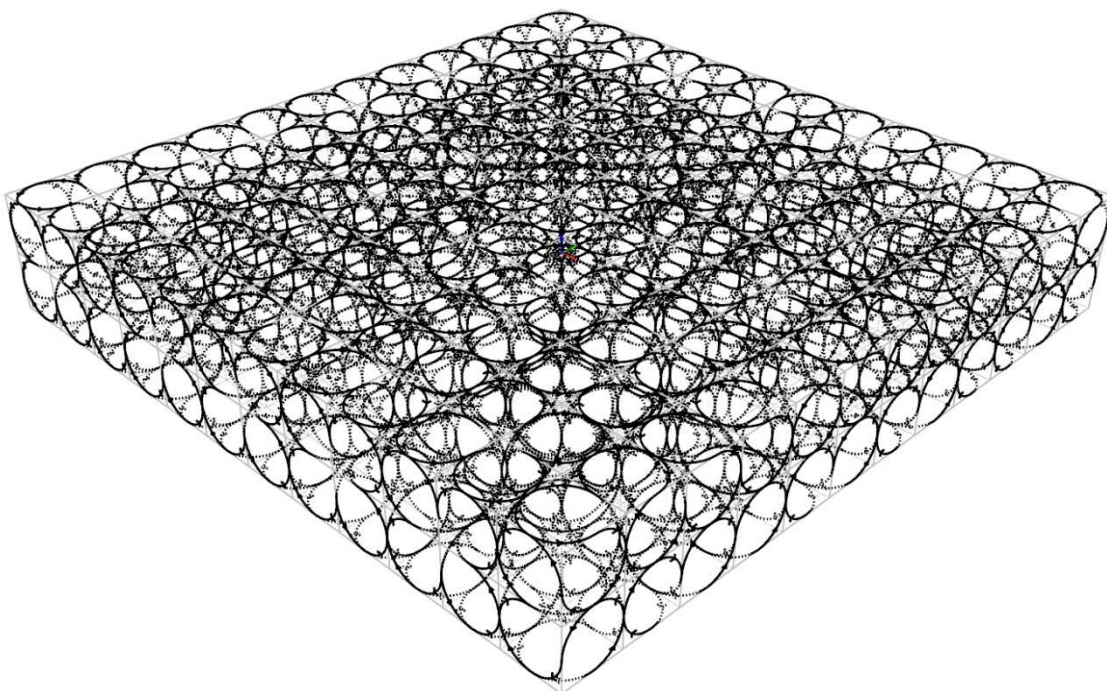


Fig. 57
(288 loops $LC_{\frac{3}{4}}$ assemblati armonicamente)

SA.288 *b*

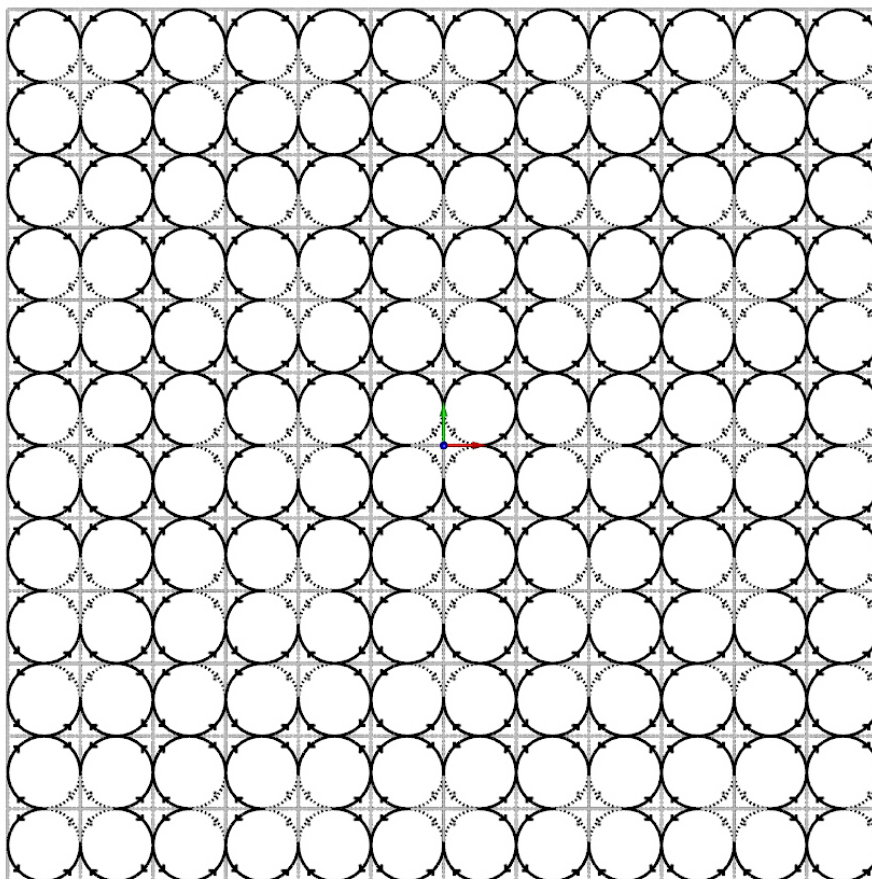


Fig. 58
(figura 57 vista dall'alto)

SA.288 *c*

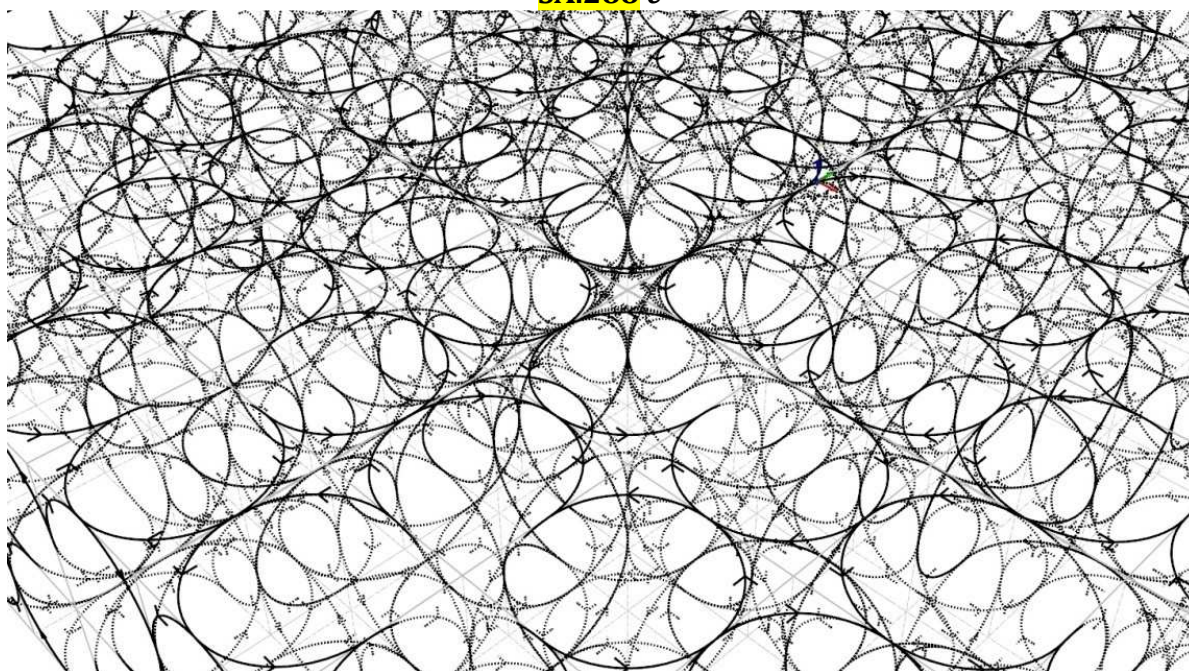


Fig. 59
(particolare di figura 11.26)

SA.288 *d*

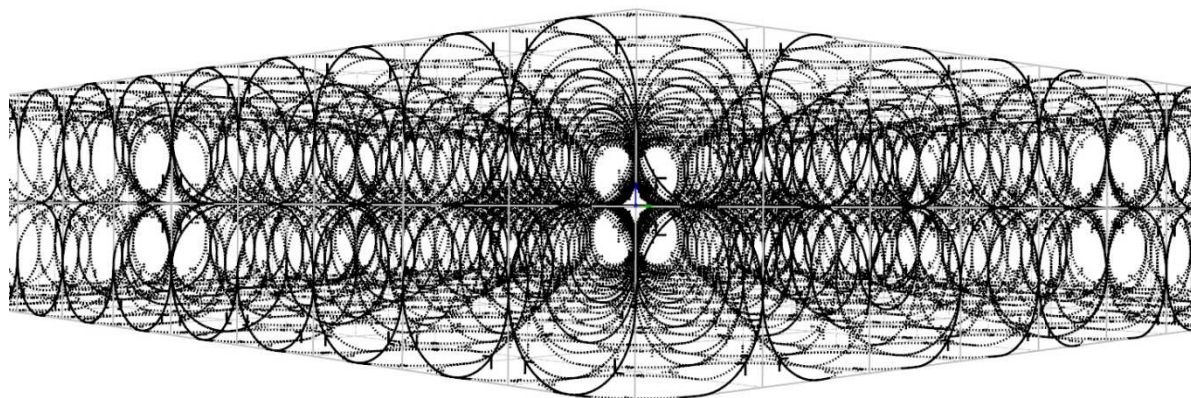


Fig. 60
(vista prospettica parziale di figura 11.26)

Seconda tassellazione dello spazio 3-D

20. Strutture Armoniche costruite combinando loops dell'Ottaedro e del Tetraedro

Qui, nella figura 61, è mostrata una $LC_{1/3}$ dell'ottaedro regolare.

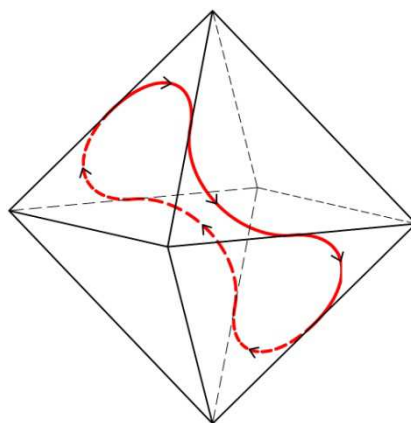


Fig. 61
(Loop $LC_{1/3}$ dell'ottaedro)

Prima di procedere alla tassellazione dello spazio 3D con la combinazione armonica di loops dell'ottaedro e del tetraedro, andremo alla scoperta di una notevole proprietà posseduta esclusivamente dall'ottaedro, in quanto è il solo poliedro regolare convesso nel quale in ogni vertice converge un numero pari di facce.⁴⁶ Metteremo dunque in luce l'annunciata proprietà attraverso tre passaggi.

Primo passaggio: prendiamo il loop $LC_{1/3}$ dell'ottaedro della figura 61. Qui il loop è colorato in rosso ed è presente su sei delle otto facce del poliedro. Ora, volendo inserire su di esso un secondo $LC_{1/3}$ (colorato in verde per distinguerlo dal primo), inizieremo con il tracciare un arco di 120° connesso ad un qualsiasi arco del loop rosso, in modo tale che il verso di rotazione indicato dalle freccette sia lo stesso per entrambi gli archi. A questo punto sarà molto semplice completare il loop verde, e ottenere così un percorso continuo a due colori che chiameremo "ottaedro- $2LC_{1/3}$ " (figura 11. 31).

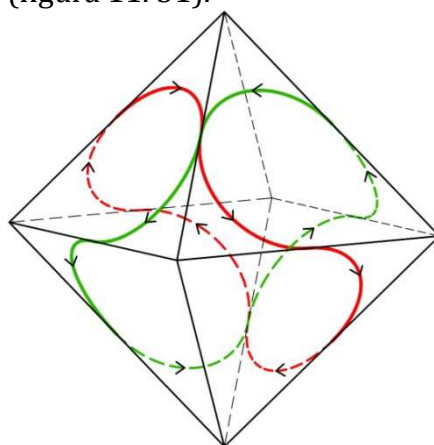


Fig. 62
(Loop $2-LC_{1/3}$ dell'ottaedro)

⁴⁶ Nell'ottaedro, verso ciascuno dei suoi sei vertici converge un numero pari di facce (quattro), mentre nei restanti solidi converge un numero dispari di facce: tre nel tetraedro, nel cubo e nell'icosaedro, cinque nel dodecaedro.

Secondo passaggio: partendo da quest'ultima figura, tratteremo su di essa un terzo $LC_{1/3}$ colorato in nero, inizieremo con un arco di 120° su una qualsiasi delle facce dell'ottaedro e seguendo il medesimo procedimento adottato nel primo passaggio. Otterremo così un percorso continuo a tre colori formato da 3-Loops $LC_{1/3}$ dell'ottaedro e lo chiamiamo "ottaedro- $3LC_{1/3}$ " (figura 11.32). Per non complicare la lettura dei loops, qui sono state occultate quattro delle otto facce del poliedro.

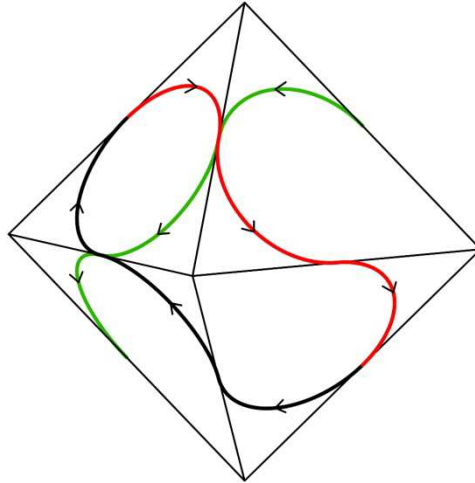


Fig. 63
(Loop 3- $LC_{1/3}$ dell'ottaedro)

Terzo passaggio: in figura 63 si può notare che, delle otto facce dell'ottaedro, due sono impegnate a 360° e le restanti sei lo sono a 240° . Su queste ultime possiamo dunque tracciare un ultimo $LC_{1/3}$, seguendo le stesse procedure di prima. Otterremo così un percorso continuo a quattro colori formato da 4-Loops $LC_{1/3}$ dell'ottaedro, come illustrato nelle figure 64 a, b, c, d, e lo chiamiamo "ottaedro- $4LC_{1/3}$ ". Queste tre ulteriori curve platoniche le chiameremo "Curve Multiple Coerenti".

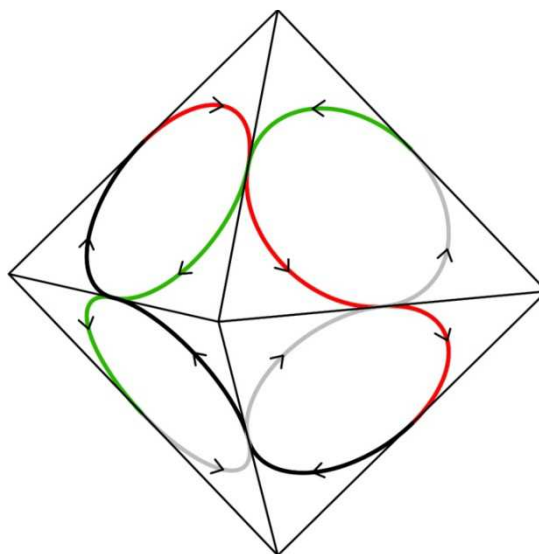
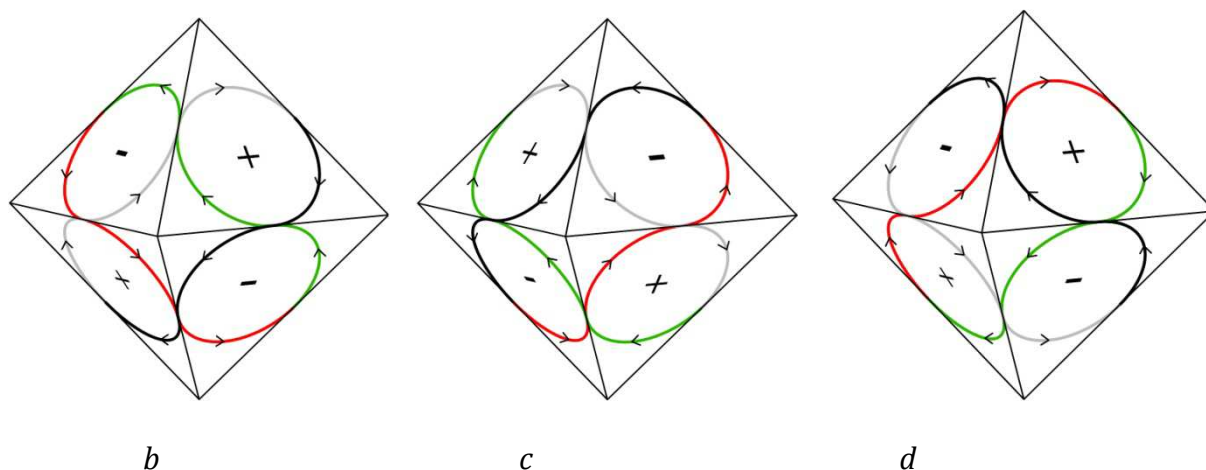


Fig. 64 a
(Loop 4- $LC_{1/3}$ dell'ottaedro)



Figg. 64 *b, c, d*

(ciascuna di queste tre figure è ottenuta ruotando la figura 64 *a* di 90° attorno alla verticale)

Si osservi che qui, per semplicità di lettura, gli assi di spin sono stati sostituiti dal segno “+” laddove il verso di percorrenza dei loops è antiorario, e dal segno “-” dove il loro verso è orario (per maggiore chiarezza, si rimanda alla nota 19 del cap. IX).

Che cosa ci sia di tanto speciale ed esclusivo in quest’ultima figura, lo si può capire osservando come le rotazioni a 360° sulle otto facce del poliedro concordano tutte fra loro⁴⁷. Inoltre, è possibile scegliere a piacimento un qualsivoglia percorso lungo i quattro loops, ad esempio scegliendo un solo colore, oppure passando da un colore ad un altro senza che ci sia soluzione di continuità.

Per poter apprezzare appieno queste proprietà sarebbe utile costruire manualmente un ottaedro (meglio due per le descrizioni che seguiranno) con cartoncino e forbici, e poi, usando quattro pennarelli di colori diversi, tracciare su di esso (su di essi) i quattro loops con le relative freccette e i segni “+” e “-”, come sopra illustrato.

In queste descrizioni, per evitare una visualizzazione troppo complicata delle figure, abbiamo fatto ricorso alle Curve di Loop $LC_{1/3}$, ma sarebbero altrettanto efficaci sia le Superfici di Loop $LS_{1/3}$ che i Volumi di Loop $LV_{1/3}$.

SA.2 dell’ottaedro- $4LC_{1/3}$

Siano dati due ottaedri- $4LC_{1/3}$, come mostrati in figura 11.34.

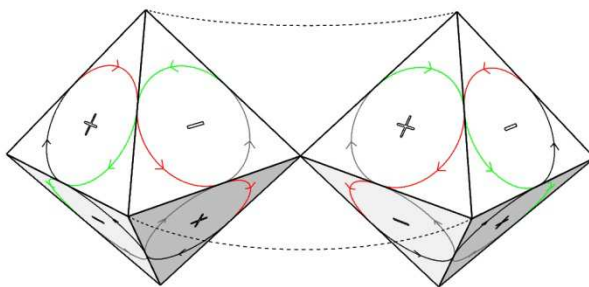


Fig. 65

⁴⁷ Immaginando che le otto circonferenze vengano sostituite da altrettante corone dentellate munite di perni centrali simili a quelle degli orologi, il movimento circolare di una corona farebbe ruotare le altre sette in modo sincrono.

La corrispettiva **SA.2** si ottiene sovrapponendo fra loro i vertici collegati dal tratteggio (figure 66 *a, b, c, d*)

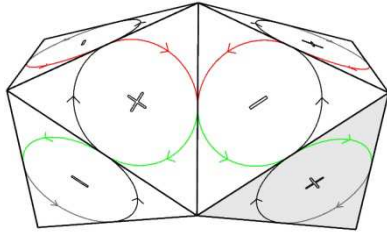


FIG. 65 *a*

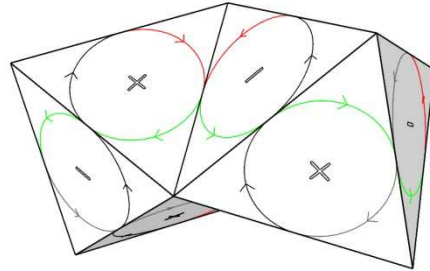


FIG. 65 *b*

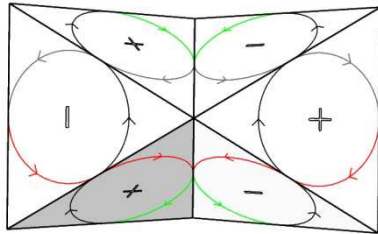


FIG. 65 *c*

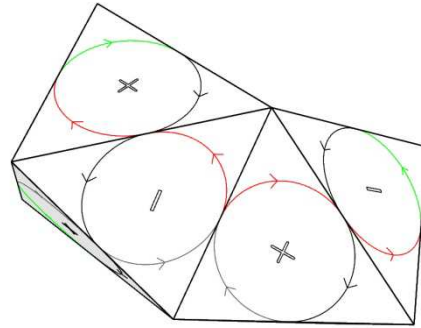


FIG. 65 *d*

Figg. 65 *a, b, c, d*

(**SA. 2** dell'ottaedro- $4LC_{1/3}$ da 4 diversi punti di osservazione)

SA.2 del tetraedro- $LC_{1/3}$.

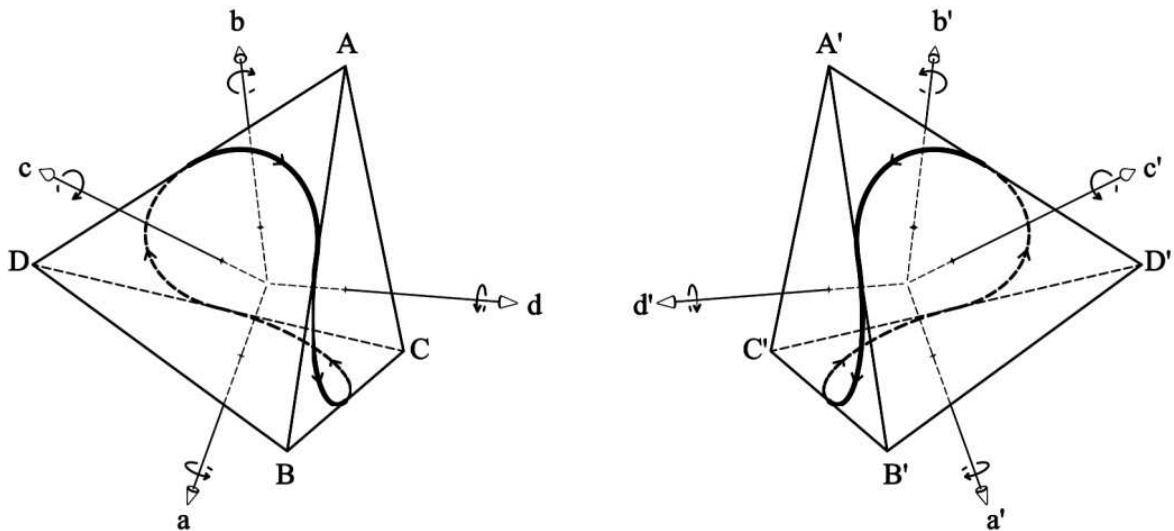


Fig. 66

(due loops $LC_{1/3}$ del tetraedro ciascuno con i suoi quattro assi di spin)

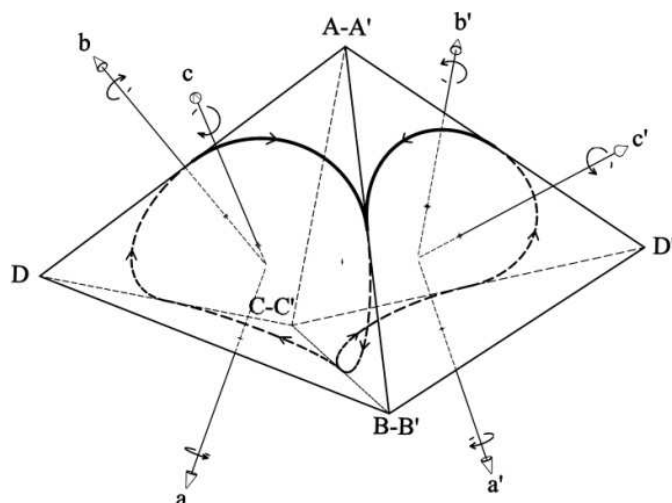


Fig.67

(SA.2 $LC_{1/3}$ resa leggibile dalla coppia di tetraedri in cui è inscritta, con gli assi (di spin) attorno ai quali ruota)

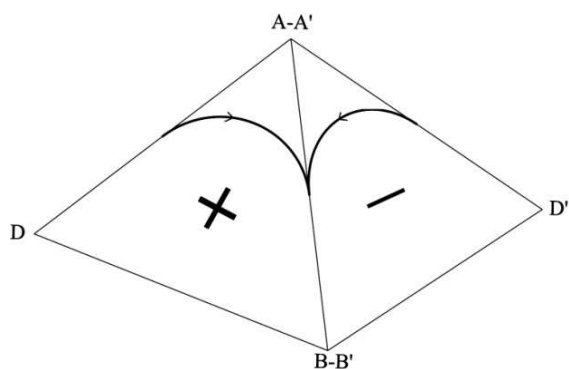


Fig. 68

(è la figura 67 vista di prospetto, in cui gli assi di spin uscenti dal centro delle facce visibili sono stati sostituiti dai segni + e -)

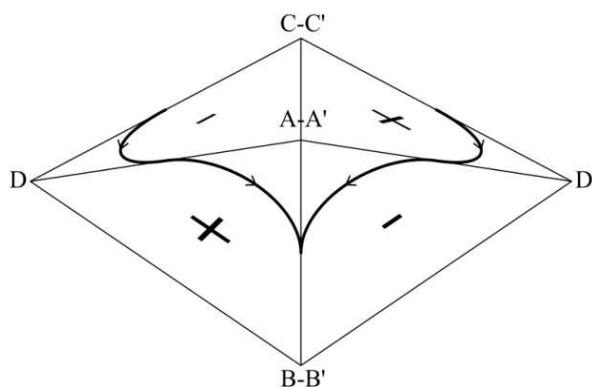


Fig. 69

(è la figura 68 ruotata in senso orario di 60° attorno alla direzione DD')

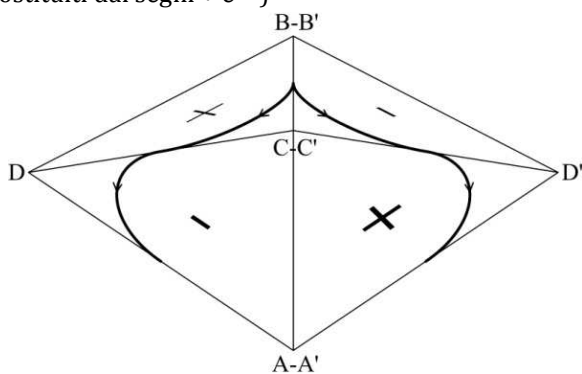


Fig. 70

(figura 68 ruotata di 120° attorno alla direzione DD')

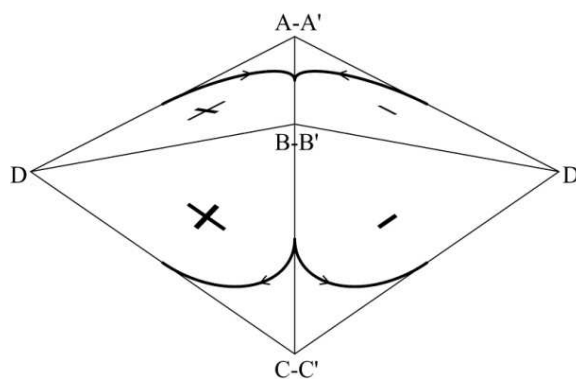


Fig. 71

(figura 68 ruotata di 240° attorno alla direzione DD')

Procederemo adesso all'annunciata tassellazione dello spazio $3D^{48}$ con la combinazione di loops dell'ottaedro- $4LC_{1/3}$ e loops del tetraedro- $LC_{1/3}$, dove entrambi i poliedri avranno il lato della stessa lunghezza.

⁴⁸ La tassellazione dello spazio 3D consegue dal fatto che l'angolo diedro dell'ottaedro ($109,471\dots^\circ$) è supplementare dell'angolo diedro del tetraedro ($70,528\dots^\circ$). Inoltre, si vuole far presente, a titolo di ipotesi, che il campo di ciascun loop (più propriamente, il campo di ciascun Volume di

Assemblaggi di questo tipo saranno indicati con “**SA.m+n** (Strutture Armoniche costituite di un numero m di loops dell’ottaedro e di un numero n di loops del tetraedro). Inoltre, per meglio comprendere le modalità di assemblaggio, anche in questo procedimento verranno evidenziati i versi di rotazione *antiorario* e *orario*, rispettivamente, con il segno “+” e con il segno “-” (si ricorda che i versi di rotazione orario e antiorario hanno il punto di vista nel centro della LC). Qui ci limiteremo ad assemblare una **SA2+6**.

Sapendo che l’angolo diedro dell’ottaedro misura $109,471^\circ = \arccos(-1/3)$ e facendo riferimento alla **SA.2** dell’ottaedro-4 $LC_{1/3}$ (v. figure 11.35 *a, b, c, d*), osserviamo che in tale struttura è presente, in tre diverse posizioni, un doppio angolo diedro (che misura $218,942^\circ = 2\arccos(-1/3)$).

Sappiamo poi che l’angolo diedro del tetraedro misura $70,528^\circ = \arccos(1/3)$ e che quindi è il supplementare di quello dell’ottaedro. E sappiamo anche che in ogni **SA.2** del tetraedro (v. figure 11.38-11.41), in corrispondenza di ciascun lato della faccia comune è presente un doppio angolo diedro ($141,057^\circ = 2\arccos(1/3)$). Pertanto, un doppio angolo diedro dell’ottaedro e uno doppio del tetraedro sono tra loro esplementari.

Per costruire la Struttura armonica **SA.2+6**, prendiamo la **SA.2** dell’ottaedro-4 $LC_{1/3}$ della figura 11.35*a* e in ciascuna delle sue tre concavità incolliamo una **SA.2** $LC_{1/3}$ del tetraedro, in questo assemblaggio specifico quella della figura 11.41, come rappresentato in figura 11.42.

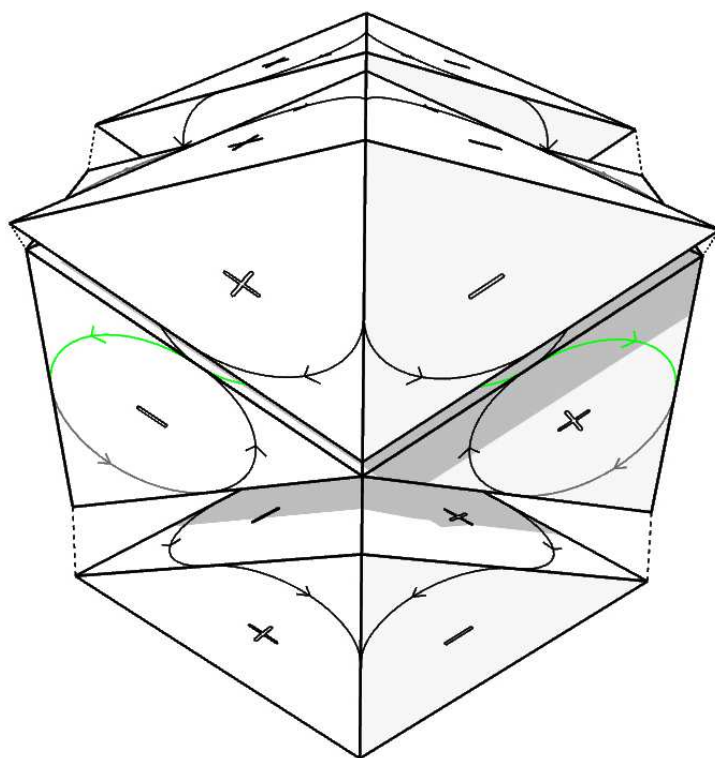


Fig. 72
(**SA.2+6**)

2 SA2 dell'ottaedro + 3 SA2 del tetraedro

Loop, LV) si estende al suo intorno illimitatamente, vale a dire che la sua intensità segue la nota legge dell’inverso del quadrato della distanza. Ciò assicura che non vengano lasciati fra i loops spazi privi di struttura.

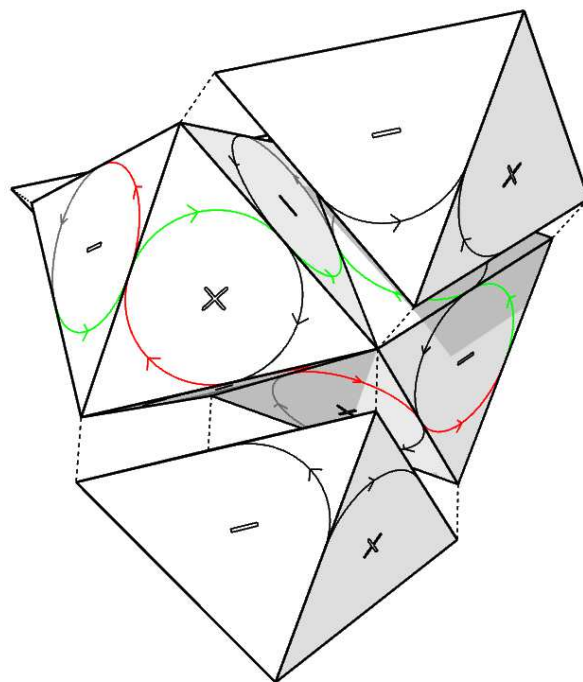


Fig. 73
(prima variante prospettica della figura 72).

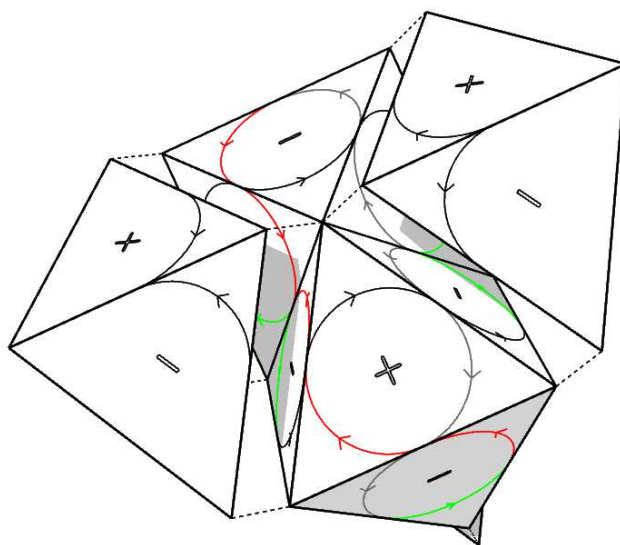


Fig. 74
(seconda variante prospettica della figura 72)

1

Si otterrà così una struttura con una superficie formata da venti triangoli equilateri, dei quali due sono opposti fra loro e diciotto sono ripartiti in tre facce paraboloidi esagonali che chiameremo “facce esatriangolari”, ciascuna composta da sei triangoli equilateri (figure 11.45 *a, b, c, d, e*). In questo caso particolare, i segni “+” e “-” risulteranno alternati in ciascuna di queste tre facce.⁴⁹

⁴⁹ Si sarebbe potuto scegliere di incollare, anziché la SA.2 del tetraedro di figura 11.41, quella di figura 11.39 (o 11.40), ma dopo averla ruotata di 180° attorno alla retta perpendicolare alla pagina. In tal caso, i segni “+” e “-” non risulterebbero ovunque alternati.

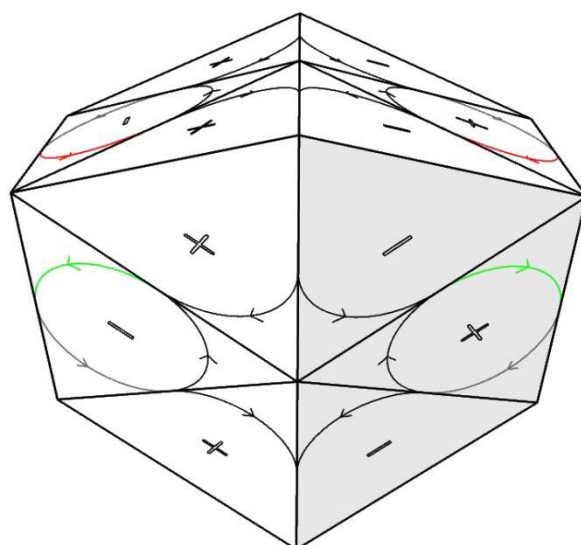


Fig. 75 *a*
(SA.2+6 risultante dopo le incollature)

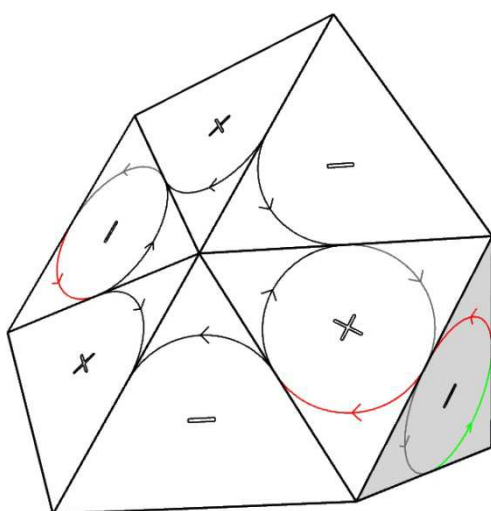


Fig. 75 *b*
(prima variante prospettica)

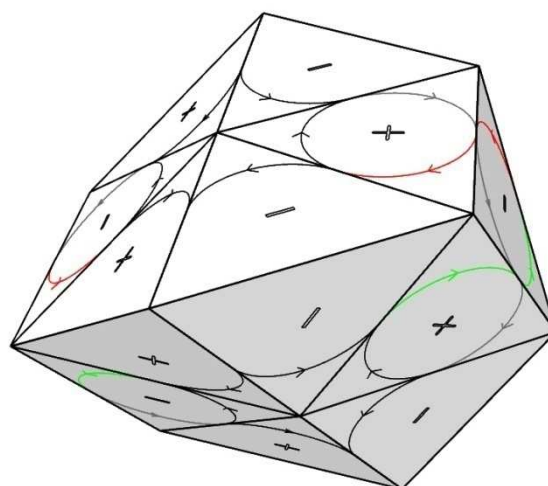


Fig. 75 *c*
(seconda variante prospettica)

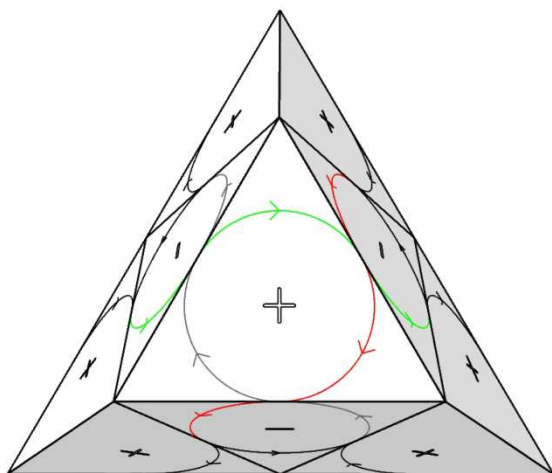


Fig. 75 *d*
(terza variante prospettica)

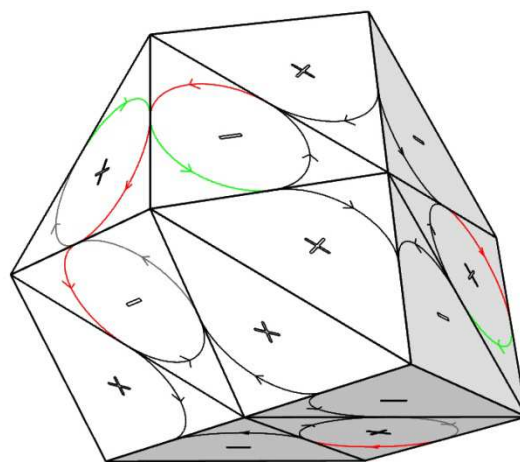


Fig. 75 *e*
(quarta variante prospettica)

La **SA.2** dell'ottaedro $4-LC_{1/3}$ può essere combinata opportunamente con tre **SA.2** del tetraedro $LC_{1/3}$ anche diversamente, in modo tale che sulle 3 facce esatriangolari non si ottenga una distribuzione alternata dei segni "+" e "-". Si ricorda che, comunque avvenga l'operazione di assemblaggio, si richiede che le due facce che vengono a sovrapporsi in ciascuna incollatura abbiano segni opposti fra loro.

Si osservi che la tassellazione dello spazio 3D con i loops dell'ottaedro e quelli del tetraedro può procedere ad libitum e può anche dar luogo alla formazione di un'immensa varietà di strutture.

Infine, sono state prodotte diverse animazioni computerizzate di entrambe le tassellazioni, visibili sul sito web <www.carloroselli.com>.

Appendice A1

Forme Semplici

La seguente tabella descrive le Forme Semplici derivabili dall'intersezione tra un tetraedro di spigolo a ed una sfera di raggio r con centro nel baricentro del tetraedro dove,

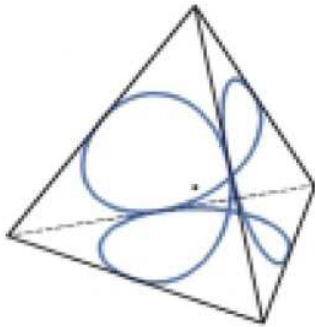
$$r = a/4 \sqrt{2}$$

Tab.3 **Tabella delle Forme Semplici**

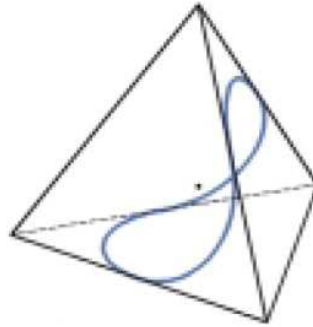
FORMA	ABBREVIAZIONE	NOMINATIVO
Intersezione	IST	Sfera – Tetraedro
Curve	LC _{2/3}	Loop _{2/3}
	LC _{1/3}	Loop _{1/3}
	ELC _{2/3} -LIB oa	Emi-Loop _{2/3} - Curva Libera oraria-antioraria
	ELC _{1/3} -LIB oa	Emi-Loop _{1/3} - Curva Libera oraria-antioraria
	ELC _{2/3} -LIB ao	Emi-Loop _{2/3} – Curva Libera antioraria-oraria
	ELC _{1/3} -LIB ao	Emi-Loop _{1/3} - Curva Libera antioraria-oraria
	ELC _{2/3} -TAN	Emi-Loop _{2/3} - Curva Tangente
Superfici	LS _{2/3}	Loop _{2/3}
	LS _{1/3}	Loop _{1/3}
	ELS _{2/3} -LIB oa	Emi-Loop _{2/3} - Curva Libera oraria-antioraria
	ELS _{1/3} -LIB oa	Emi-Loop _{1/3} - Curva Libera oraria-antioraria
	ELS _{2/3} -LIB ao	Emi-Loop _{2/3} – Curva Libera antioraria-oraria
	ELS _{1/3} -LIB ao	Emi-Loop _{1/3} - Curva Libera antioraria-oraria
	ELS _{2/3} -TAN	Emi-Loop _{2/3} - Curva Tangente
Volumi	LV _{2/3}	Loop _{2/3}
	LV _{1/3}	Loop _{1/3}
	ELV _{2/3} -LIB oa	Emi-Loop _{2/3} – Curva Libera oraria-antioraria
	ELV _{1/3} -LIB oa	Emi-Loop _{1/3} - Curva Libera oraria-antioraria
	ELV _{2/3} -LIB ao	Emi-Loop _{2/3} – Curva Libera antioraria-oraria
	ELV _{1/3} -LIB ao	Emi-Loop _{1/3} - Curva Libera antioraria-oraria
	ELV _{2/3} -TAN	Emi-Loop _{2/3} – Curva Tangente

Note: Gli Emi-Loops si differenziano facilmente prendendo in considerazione il loro punto di partenza all'intersezione tra curva e spigolo del tetraedro circoscritto. **Curve Tangenti** partono da punti contati due volte. **Curve Libere** partono da punti singoli. I pedici **1/3** e **2/3** si riferiscono alla porzione di ogni circonferenza d'intersezione tra sfera e tetraedro utile a descrivere le forme.

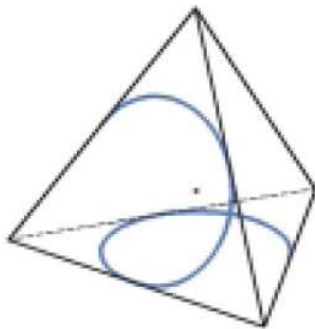
Curve



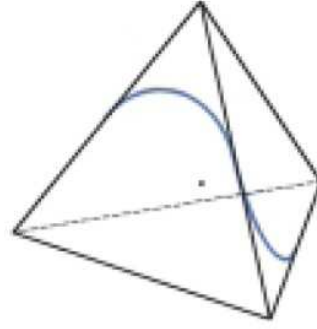
LC 2/3 - TAN (Loop 2/3)



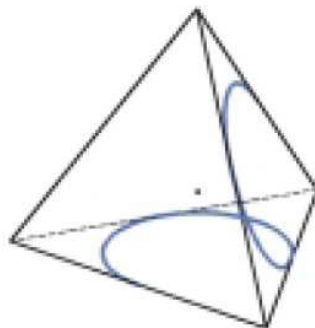
LC 1/3 - TAN (Loop 1/3)



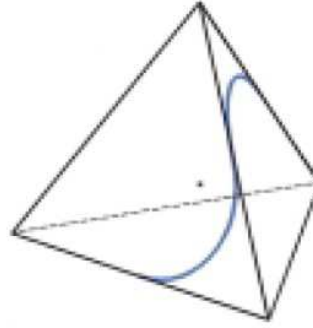
ELC 2/3 - LIB (Emi-loop 2/3 Curva Libera ao)



ELC 1/3 - LIB (Emi-loop 1/3 Curva Libera ao)

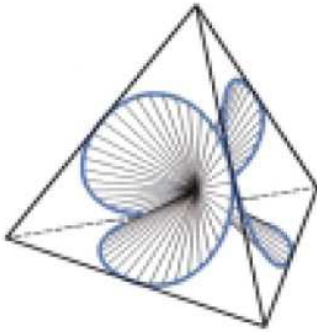


ELC 2/3 - LIB (Emi-loop 2/3 Curva Libera oa)

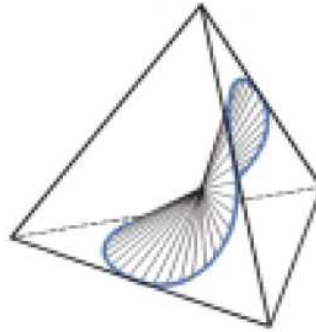


ELC 1/3 - LIB (Emi-loop 1/3 Curva Libera oa)

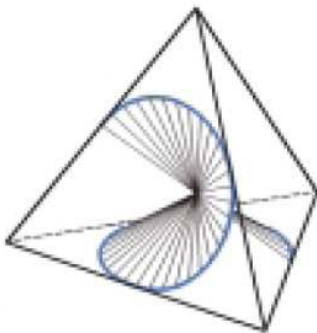
Superfici



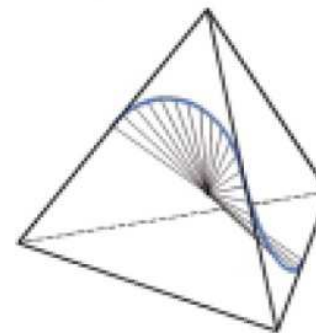
LS 2/3 - TAN (Loop 2/3)



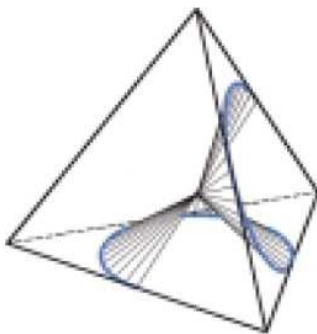
LS 1/3 (Loop 1/3)



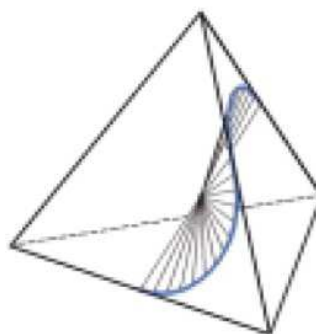
ELS 2/3 - LIB (Emi-loop 2/3 Curva Libera ao)



ELS 1/3 - LIB (Emi-loop 1/3 Curva Libera ao)

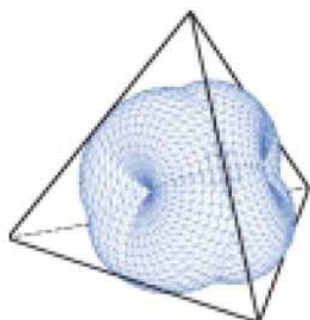


ELS 2/3 - LIB (Emi-loop 2/3 Curva Libera oa)

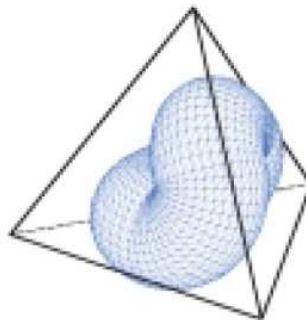


ELS 1/3 - LIB (Emi-loop 1/3 Curva Libera oa)

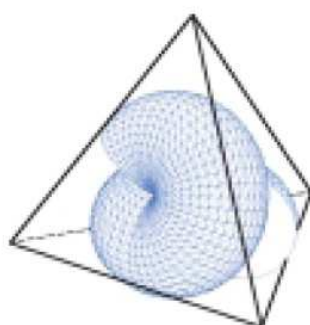
Volumi



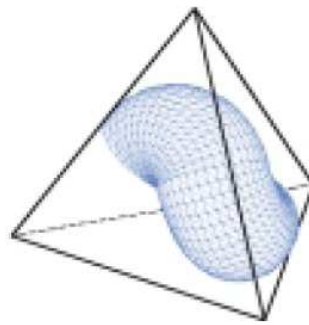
LV 2/3 - TAN (Loop 2/3)



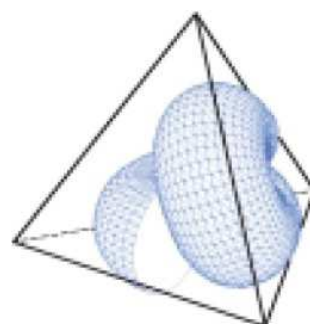
LV 1/3 (Loop 1/3)



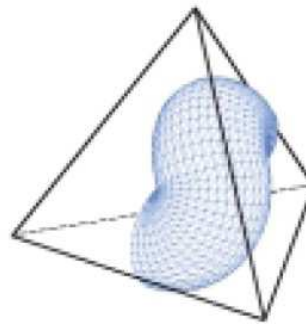
ELV 2/3 - LIB (Emi-Loop 2/3 Curva Libera ao)



ELV 1/3 - LIB (Emi-Loop 1/3 Curva Libera ao)



ELV 2/3 - LIB (Emi-Loop 2/3 Curva Libera oa)



ELV 1/3 - LIB (Emi-Loop 1/3 Curva Libera oa)

Un'analisi dettagliata delle Forme Semplici sopra elencate potrebbe fornire una maggiore comprensione delle topologie ottenibili dall'intersezione tra sfera e tetraedro. Sarebbe necessario ricavare le equazioni di tutte le curve, superfici, e volumi in termini del raggio sferico r . Inoltre, le equazioni di tipo sia algebrico che parametrico potrebbero essere trasformate dal sistema di assi cartesiani (ortogonali in tre dimensioni), ad un sistema a quattro assi (raggi) ad un angolo di $109^{\circ}28'$ tra loro. Da queste si otterrebbero varie proprietà delle forme:

- simmetrie
- elicità, curvatura, torsione

Queste ed altre proprietà sarebbero utili a descrivere le Forme Semplici (inclusive di quelle illustrate nei capitoli X e XI) e a darci una visione delle loro possibili applicazioni fisiche. Inoltre, si potrebbe cercare di specificare un campo vettoriale (3×3) per un sistema dinamico, in grado di mostrare le forme semplici come attrattori (caotici o tradizionali). Ciò consentirebbe di stabilire le proprietà delle forme semplici con strumenti analitici tradizionali e ben consolidati.

Appendice 2

Calcolo della lunghezza di $LC_{2/3}$ e dell'area della superficie di $LS_{2/3}$.

Facendo riferimento al raggio r_1 della circonferenza inscritta al triangolo equilatero di spigolo a che delimita la faccia del tetraedro (figura 76), si può calcolare la misura della lunghezza l della curva $LC_{2/3}$ e l'area A della superficie $LS_{2/3}$.

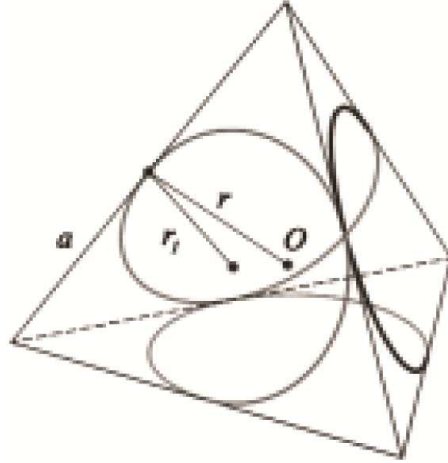


Fig. 76

Infatti, si ha che:

$$l(LC_{2/3}) = 4 \cdot \frac{2}{3} 2\pi \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

ovvero

$$l(LC_{2/3}) = \frac{8}{9} \sqrt{3} \pi a$$

Assumendo $r = 1$, dalla relazione $r = 1/4 a\sqrt{2}$ si avrà

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

e, di conseguenza

$$l(LC_{2/3}) = 4\pi \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{2^3}{3^2}$$

L'area A della superficie $LS_{2/3}$ sarà

$$A(LS_{2/3}) = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{2^3}{3^2}$$

Appendice 3

Istruzioni per la costruzione e la manipolazione di un modello di $LS_{2/3}$

In questa appendice si mostrerà come costruire un modello di $LS_{2/3}$ allo scopo di prendere familiarità con tale oggetto, che a qualcuno potrebbe risultare anche giocoso. Sarà sufficiente procurarsi un foglio di cartoncino (o di un qualunque altro materiale laminare, preferibilmente sottile e flessibile, che si presti ad essere incollato o saldato), un compasso, un paio di forbici e della colla. Come indicato in figura 77, si disegnano e si ritagliano tre corone circolari (o anche tre cerchi) di uguale raggio e su ciascuna di esse si esegua un taglio radiale.

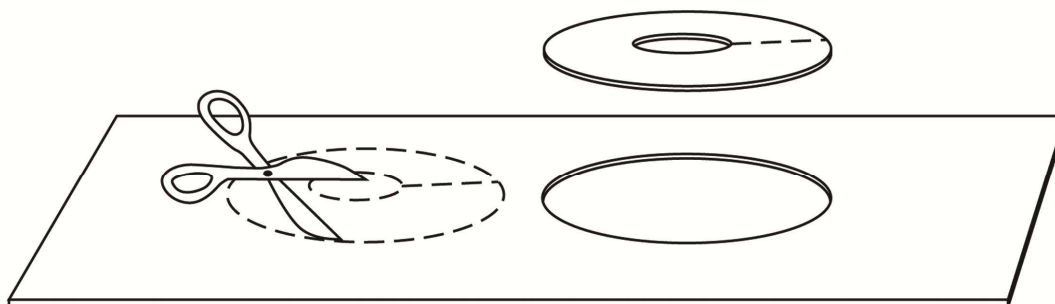


Fig. 77

A questo punto si propongono due modelli alternativi, e cioè una prima versione più fedele a $LS_{2/3}$, e una seconda versione approssimata ma più semplice da realizzare, più facilmente manipolabile e altrettanto efficace della prima nel rappresentare le caratteristiche topologiche del nostro oggetto.

Per la prima versione (fig. 78) si utilizzino tre corone circolari, le si dispongano una sopra l'altra e le si unisca procedendo nel seguente modo: uno dei due lembi della corona superiore sia incollato (ad esempio, con la sovrapposizione di una sua piccola porzione) al lembo opposto della corona centrale e il lembo libero di questa sia incollato al lembo della corona sottostante. Si otterrà così una corona (o cerchio) spirale caratterizzata da una elicità (direzione di avvitamento) destrorsa o sinistrorsa, a seconda della scelta iniziale del lembo da incollare. Nell'esempio qui raffigurato l'elicità della corona spirale è destrorsa, come quella di un cavatappi. Nella figura 2 si può anche notare che la lunghezza della corona spirale è minore di quella data da tre corone circolari; occorrerà adesso eliminarne una certa porzione in modo tale che, tenuto conto di tutte le porzioni sottratte nell'incollatura, la lunghezza della corona spirale sia infine di circa 783° . Per la seconda versione del modello (fig. 41) si procederà allo stesso modo, ma utilizzando soltanto due corone circolari.

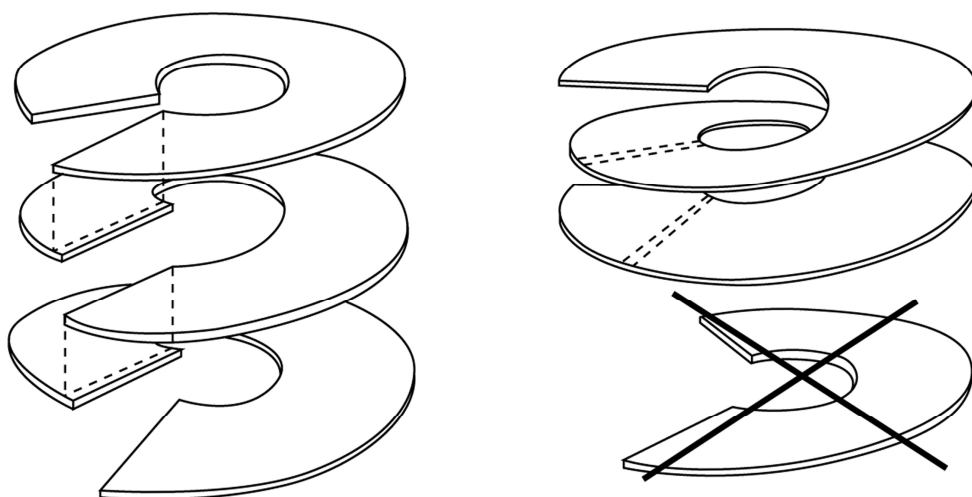


Fig. 78

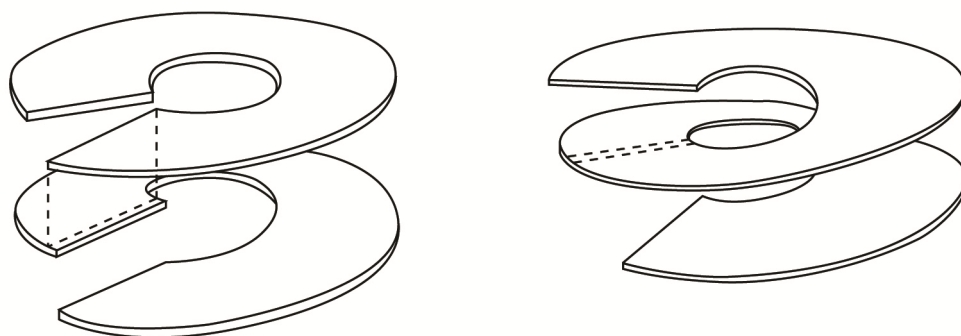


Fig. 79

Avendo così ottenuto una lamina a forma di corona spirale elicoidale, non resterà che eseguire una particolare operazione per trasformarla in una lamina a forma sferica-tetraelicoidale chiusa. Detta operazione consiste nell'introflettere contestualmente i lembi della corona spirale (fig. 80) e nel ruotarli intorno al centro fino a portarli l'uno di fronte all'altro per essere infine incollati fra loro (figg. 43 e 44). La forma della struttura finale avrà spiccate affinità sia con la sfera che con il tetraedro e, più precisamente, sarà un modello rappresentativo di un tronco di cono sferico caratterizzato da un'elicità continua alternativamente destrorsa e sinistrorsa.

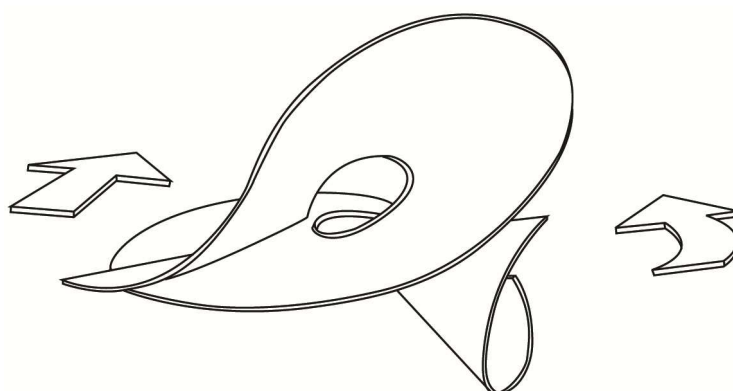


Fig. 80

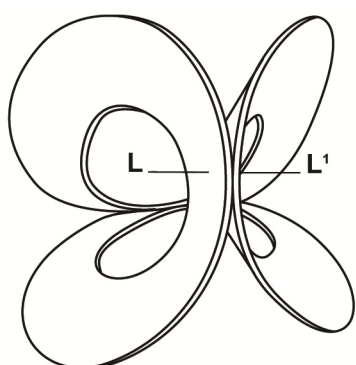


Fig. 81

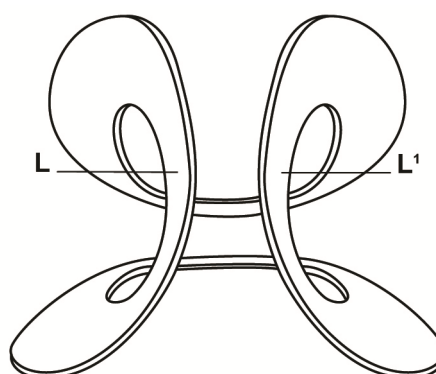


Fig. 82

Le figure 83, 84, 85 e 86 mostrano la preparazione di un modello del tipo illustrato nelle figure 81 e 82, utilizzando però due cerchi anziché due corone circolari, oppure due cerchi più una porzione di 63° (sarà solo un po' più laboriosa l'operazione di incollatura).

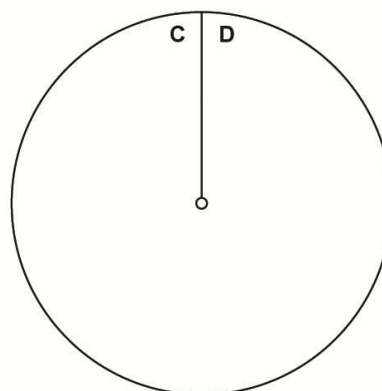
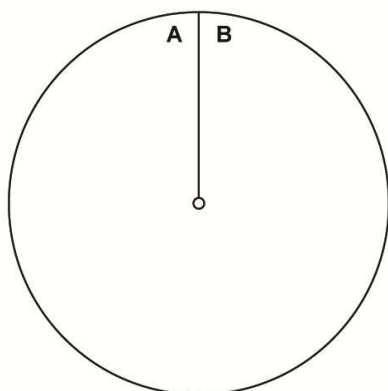


Fig. 83

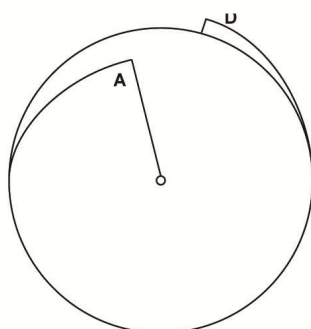


Fig. 84

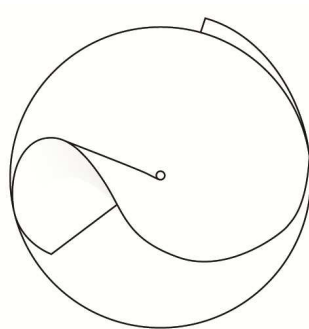


Fig. 85

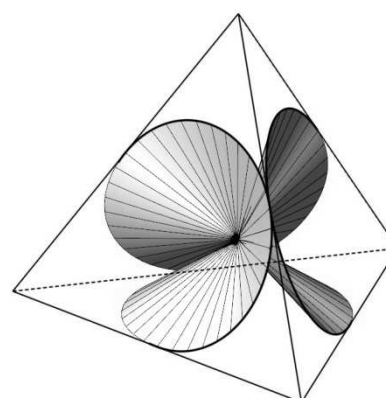


Fig. 86

Una volta scelto e realizzato il modello fisico della figura 86, vi si potranno apporre dei segni o dei colori allo scopo di ben visualizzare le proprietà e le simmetrie di $LS_{2/3}$ descritte nel primo capitolo. Infine, attraverso un'adeguata manipolazione che non richiede di staccare le mani dalla

struttura, è possibile far ruotare questa con continuità intorno alla sua quaterna di assi polari senza che subisca eccessive deformazioni. Naturalmente, occorrerà trattenere la struttura fra le dita in modo corretto e fare i corretti movimenti. Si suggerisce di stringere fra le dita della mano sinistra una delle due parti fra loro ravvicinate della struttura e fra le dita della mano destra l'altra, facendo in modo che i pollici si trovino a contatto uno accanto all'altro. Da questa posizione converrà prima sperimentare dei piccoli movimenti dirigendo una mano verso il proprio corpo e l'altra nel verso opposto, simultaneamente e ruotandole entrambe leggermente verso il basso. Si potrà subito osservare che, se le due parti della struttura tenute fra le dita ruotano entrambe in senso orario, le due parti opposte (che hanno una disposizione spaziale ruotata di 90° rispetto alle prime) ruoteranno in senso antiorario. Non sarà facile imparare subito a far ruotare la struttura con continuità senza staccarne le dita. Come accade in molte esperienze, si dovrà andare per tentativi finché non sarà trovata la giusta coordinazione delle mani, e non è detto che non ci si riesca in pochissimi minuti.